VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका

Vol. 29 January 1986 No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

बहुपदी सेट $\{Z^*_{\gamma n_1}(x, y)\}$ का उपगामी का आचरण

आर० एन० पाण्डेय, एन० के० तिवारी तथा एस० के० पाण्डेय

संप्रयुक्त गणित अनुभाग, संप्रयुक्त विज्ञान स्कूल, प्रौद्योगिक संस्थान,

बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—अगस्त 29, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने नव परिभाषित बहुपदी सेट $\{z^*_{\gamma_1 n}(x,y)\}$ के क्रम को अनन्त की ओर अग्रसर होने की स्थिति में बहुपदी के आचरण का अध्ययन किया है। प्राप्त निष्कर्ष अपेक्षाकृत नये हैं जिन्हें प्रमेय के रूप में प्रस्तुत किया गया है। व्यापक निष्कर्षों के आधार पर लाम्बिक बहुपदी के लिये भी निष्कर्ष व्यवकलित किये गये हैं।

Abstract

Asymptotic behaviour of the polynomial set $\{z^*_{\gamma_1 n}(x; y)\}$. *By* R. N. Pandey, N. K. Tewari and S. K. Pandey, Applied Mathematics Section, School of Applied Sciences, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-221005.

In this paper we have studied the behaviour of the nearly defined polynomial set $\{z^*_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ as the order of the polynomial tends to infinity. The results obtained are relatively new which are produced in the form of theorem. Corresponding results for ortlyogonal polynomials have also been deduced from the general results.

1. प्रस्तावना

नव परिभाषित बहुत $z^*_{\gamma_1 n}(x, y)$ लगभग 25 लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपदी जैसे—हरमाइट, जैकोबी, बेटमैन, राइस, क्राल तथा फ्रिंक, लॉग्रान्ज, हॉन, चार्लियर, मेक्सनर तथा क्रानचॉक, रेकॉह आदि को एकीकृत करता है। उपर्युक्त सभी बहुपदी वैज्ञानिकों तथा तकनीकीविदों के लिये अत्यन्त महत्वपूर्ण है क्योंकि ये बहुपदी विभिन्न भौतिक समस्याओं को वर्णित करने वाले अवकल समीकरण,

अवकल अंतर समीकरणों में समाहित रहते हैं। उदाहरणस्वरूप जब लाप्लॉस समीकरण का गोलीय ध्रुवीय निर्देशांक के अन्तर्गत विवेचना की जाती है तो लिगेन्ड्र बहुपदी समाहित रहते हैं। मुख्यतः लिगेन्ड्र बहुपदी का उपयोग हाइड्रोजन परमाणु के क्वान्टम यांत्रिकी अध्ययन के अन्तर्गत होता है। इसे भूकम्प विज्ञान तथा संचरण लाइन सिद्धान्त में भी प्रयुक्त करते हैं। अतः बहुपदी सेट $\{z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ तथा इसके विभिन्न गुणों का, जिनमें इसका उपगामी आचरण भी समाहित हैं, अनेक भौतिक तथा तकनीकी समस्याओं में विशेष महत्व है।

हम यहाँ नव परिभाषित बहुपदी सेट के उपगामी आचरण को किन्हीं प्रतिबन्धित परिस्थितियों में व्यवकलित करेंगे। इच्छित निष्कर्ष प्राप्त करने के लिये हम निम्नलिखित संकेत प्रयुक्त करेंगे।

संकेत

(i) $(m)=1, 2, 3, \ldots, m$

(ii) $(a_A)=a_1, a_2, a_3, \ldots, a_A$

(iii) $[a_A]_n=\prod_{i=1}^{A}(a_i)_n$

(iv) $\triangle(a, b)=\frac{b}{a}, \frac{b+1}{a}, \ldots, \frac{b+a-1}{a}$

(v) $\triangle_k[m, (a_p)]=\prod_{j=1}^{p}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{a_j+i-1}{m}\right)_k$.

2. परिभाषा

सार्वीकृत बहुपदी सेट $\{z_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ को हम[9] निम्नलिखित जनक सम्बन्ध द्वारा परिभाषित करते हैं

$$F\begin{bmatrix}(a_A)::(b_B);(c_C);(d_D);(e_E);(f_F);(g_G); \\ (h_H)::(k_K);(p_P);(q_Q);(u_U);(v_V);(w_W);\end{bmatrix} X, Y, T$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} Z^{*\lambda_1;\lambda_2;\alpha_1;\alpha_2;\beta_1;\beta_2;\gamma_1;\gamma_2;(a_A);(b_B);(c_C);(d_D);(e_E);(f_F);(g_G)}_{\gamma_1 n;\alpha_3:\beta_3;\gamma_3;(h_H);(k_K);(p_P);(q_Q);(u_U);(v_V);(w_W)}(x,y)t^{\gamma_1 n} \quad (2.1)$$

जहाँ

(i) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ तथा γ_2 वास्तविक संख्याएँ हैं,

(ii) a, b, c तथा d ऋणेतर पूर्णांक हैं,

तथा

(iii) $X=\lambda_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} t^{\gamma_1}$, $Y=\lambda_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \gamma t_2$

$T=\lambda_3 x^{\alpha_3} y^{\beta_3} t^{\gamma_3}$, $\sqrt{X}+\sqrt{Y}+\sqrt{T}<1.$

उपर्युक्त जनक फलन में त्रिक: हाइपरज्यामितीय फलन समाहित हैं जो लॉरसिला के चौदह हाइपर-ज्यामितीय फलन[1] को एकीकृत करता है ।

समीकरण (2.1) के दाहिने पक्ष में कई चर समाहित हैं अतः संक्षेप में जनक सम्बन्ध से प्राप्त बहुपदी सेट को $\{z^*_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ से प्रदर्शित करते हैं । अर्थात्

$$Z^*_{\gamma_1 n}(x, y)=R(x, y) \sum_{l=0}^{[n/z_2]} \frac{\triangle l\,[z_4;\, 1-(h_H)-n]}{\triangle l\,[z_4;\, 1-(a_A)-n]}$$

$$\cdot \frac{\triangle l\,[z_2;\, 1-(k_K)-n]\,[c_C)]_l}{\triangle l\,[z_2;\, 1-(b_B)-n]\,[p_P)]_l}$$

$$\cdot \frac{\triangle l\,[z_4;\, 1-(q_Q)-n]}{\triangle l\,[z_4;\, 1-(d_D)-n} \cdot \frac{\triangle l\,[z_2;\, n]\,.\,\triangle l\,[z_2:\, 1-(u_U)-n]\,[(g_G)]_l\,.\,s_2{}^l}{\triangle l\,[z_2;\, 1-(e_E)-n]\,[(w_W)]_l\,.\,x^{\alpha_2^{*} l}\, y^{\beta_2^{*} l}}$$

$$F\left[\begin{array}{l}(z_3;\, 1-(h_H)-n+z_4 l),\, (z_3;\, 1-(k_K)-n+z_2 l),\\ (z_1;\, (1-q_Q)-n+z_4 l),\, (z_3;\, 1-(u_U)-n+z_2 l),\\ (z_1;\, -n+z_2 l),\, (c_C),\, (f_F);\\ (z_3;\, 1-(a_A)-n+z_4 l),\, (z_3;\, 1-(b_B)-n+z_2 l),\\ (z_1;\, 1-(d_D)-n+z_4 l),\, (z_1;\, 1-(e_E)-n+z_2 l)\\ (p_P)+l,\, (v_V);\, \dfrac{S_1}{x^{\alpha_1^*} y^{\beta_1^*}}\end{array}\right] \qquad (2.2)$$

जहाँ

$$R(x, y)=\frac{[(a_A)]_n\,[(b_B)]_n\,[(d_D)]_n\,[(e_E)]_n\,\lambda^n{}_1\, x^{\alpha_1 n}\, y^{\beta_1 n}}{[(h_H)]_n\,[(k_K)]_n\,[(q_Q)]_n\,[(u_U)]_n},$$

$$S_1=\frac{\lambda_2\,(-z_3)^{z_3(H+K-A-B)}}{(-z_1)^{z_1(-D+E-Q-U-1)}}$$

$$S_2=\frac{\lambda_2\,(-z_4)^{z_4(H+D-A-Q)}}{\lambda_1^{z_2}\,(-z_2)^{z_2(B+E-K-U-1)}},$$

$z_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, $z_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}$, $z_3 = (z_1 - 1)$, $z_4 = (z_2 - 1)$,

$\overset{*}{\alpha}_1 = \alpha_1 z_1 - \alpha_2$, $\overset{*}{\alpha}_2 = \alpha_1 z_2 - \alpha_3$, $\overset{*}{\beta}_1 = \beta_1 z_1 - \beta_2$।

$\overset{*}{\beta}_2 = \beta_1 z_2 - \beta_3$, तथा $\gamma_1 \neq 0$.

3. बहुपदी सेट $\overset{*}{z}_{\gamma_1 n}(x, y)$ का आचरण

उपर्युक्त बहुपदी सेट में समाहित कुछ प्राचलों को प्रतिबन्धित तथा सेट के क्रम को अनन्त की ओर अग्रसरित कराकर विभिन्न निष्कर्ष प्राप्त किये जा सकते हैं। इस प्रकार के कुछ निष्कर्षों को प्रमेय के रूप में निम्नवत् व्यक्त करते हैं।

प्रमेय 1

समीकरण (2.2) में $C = P = 0 = \beta_1 = \beta_2$, $\alpha_1 = \alpha_3$, $\gamma_1 = \gamma_3$ में प्रयुक्त करने पर हमें

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{n!\, [(h_H)]_n\, [(k_K)]_n\, [(q_Q)]_n\, [(u_U)]_n}{[(a_A)]_n\, [(b_B)]_n\, [(d_D)]_n\, [(e_E)]_n\, \lambda_1^n\, X_1^{\alpha_1 n}} \cdot Z_{\gamma_1 n}(X_1, Y_1) \right\}$$

$$= F\begin{bmatrix} (f_F); & \lambda_2 \\ (v_V); & \lambda_1^{z_1}\, x^{\alpha_1} \end{bmatrix} \cdot F\begin{bmatrix} (g_G); & \lambda_3\, y^{\beta_3} \\ (w_W); & \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

प्राप्त होता है, जहाँ

$$X_1 = \frac{n(\overset{*}{z}_1 + \overset{*}{z}_2)}{\overset{*}{\alpha}_1}\, x, \quad Y_1 = y n^{\overset{*}{z}_3 / \overset{*}{\beta}_3}$$

$$\overset{*}{z}_1 = z_1(Q + U + 1 - D - E), \quad \overset{*}{z}_2 = z_3\,(H + K - A - B)$$

तथा

$$\overset{*}{z}_3 = B + E - K - U - 1.$$

उपपत्ति

समीकरण (3.1) के वाम पक्ष को J_1 से प्रदर्शित करने तथा समीकरण (2.2) में $C = P = 0 = \beta_1$, $\alpha_1 = \alpha_3$ तथा $\gamma_1 = \gamma_3$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$J_1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{[n/z_1]} \sum_{l=0}^{n} \left\{ \frac{(1 - (k_k) - n)_l\, (1 - (U_U) - n)_l\, (-n)_l\, [(g_G)]_l}{(1 - (b_B) - n)_l\, (1 - (e_E) - n)_l\, [(w_W)]_l \cdot l\,!} \right.$$

$$\cdot \frac{(-1)^{(K+U+1-B-E)l} \triangle_m [z_3; 1-(h_H)-n] \triangle_m [z_3; 1+(k_K)-n+l]}{\triangle_m [z_3; 1-(a_A)-n] \triangle_m [z_3; 1-(b_B)-n+l]}$$

$$\cdot \frac{\triangle_m [z_1; 1-(q_Q)-n] \triangle_m [z_1; -n+l] \triangle_m [z_1; 1-(u_U)-n+l]}{\triangle_m [z_1; 1-(d_D)-n] \, . \, m! \triangle_m [z_1; 1-(e_E)-n+l] [(v_V)]_m}$$

$$\cdot \frac{\lambda_2^m \lambda_3^l (-z_3)^{Z_3(H+K-A-B)_m}}{\lambda_1^{z_1 m} (-z_1)^{Z_1(D+E-Q-U-1)_m}} \cdot \frac{n^{z_3 l} y^{\beta_3 l}}{n^{(\overset{*}{z}_1+\overset{*}{z}_2)_m} x^{\alpha_1 m}} \Bigg\}.$$

प्राप्त होता है । यहाँ सूत्र

$$\triangle_m [z_1; -n+l] = \left(\frac{n_1}{z_1}\right)^{z_1 m} \prod_{i=1}^{z_1} \left(1+\frac{1-l-i}{n}\right)_m$$

तथा इसी प्रकार के अन्य सूत्रों को प्रयुक्त करने पर

$$J_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(g_G)]_l [(f_F)]_m \lambda_l^m \lambda_3^l y^{\beta_3 l}}{[(w_W)]_l [(v_V)]_m \lambda_1^{z_1 m} \lambda_1^l x^{\overset{*}{\alpha}_1 m} m! \, l!}$$

$$= F\left[\begin{matrix}(f_F); \\ (v_V);\end{matrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{z_1} x^{\overset{*}{\alpha}_1}}\right] . F\left[\begin{matrix}(g_G); \\ (w_W);\end{matrix} \frac{\lambda_3 y^{\beta_3}}{\lambda_1}\right]$$

विशिष्ट दशायें

व्यापक निष्कर्ष (3.1) से हम अनुभाग 1 में वर्णित सभी बहुपदों के लिये उपगामी आचरण व्यवकलित कर सकते हैं । इनमें से कुछ निम्नवत् हैं :

समीकरण (2.1) में $l=0$ के मान से सम्बन्धित पदों को अलग करके तथा $\lambda_3=A=B=C=D=H=K=P=Q=\beta_1=a_2=0$, $a_1=1=\gamma_1$ से प्रतिस्थापित करके एवं शेष प्राचलों के उपयुक्त चुनाव द्वारा हमें निम्नलिखित रोचक निष्कर्ष प्राप्त होते हैं

(i) $E=0=F, \gamma_2=U=V=1=y=\beta_2, u_1=1+\beta, v_1=1+a, \lambda_1=\frac{1}{2}=\lambda_2$

तथा $x=\dfrac{x+1}{x-1}$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$\lim_{n\to 0} \left\{\frac{n! \, [(x+1)-n^{-2} \, . \, (x-1)]^n}{(x+1)^n (1+a)_n} P_n^{(a,\beta)} \, . \left(\frac{n^2 (x+1)+(x-1)}{n^2 (x+1)-(x-1)}\right)\right\}$$

$$=\Gamma(1+\alpha)\cdot\left\{\frac{x-1}{x+1}\right\}^{-\alpha/2} I_\alpha\left(2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}\right), \tag{3.2}$$

जहाँ $I_\alpha(z)$ α क्रम का आपरिवर्तित बेसल फलन है ।

(ii) $E=0=U=F;\ \beta_2=V=1=y=\lambda_1;\ \gamma_2=2,\ \nu_1=1,\ \lambda_2=1/4$ तथा x को $\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(nx)^{-n}x^2\,(n^2-1)+1^{n/2}P_n\left(\frac{nx}{\sqrt{(x^2(n-1)+1)}}\right)\right\}=I_0\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}\right) \tag{3.3}$$

(iii) $E=U=0=F=V;\ \beta_2=1=y;\ \lambda_2=2=\gamma_2$ तथा $\lambda_2=-1$ के लिये

$$\lim_{n\to\infty}\{(2nx)^{-n}H_n(nx)\}=e^{-1/4x^2} \tag{3.4}$$

(iv) $E=0=U=F;\ \lambda_1=V=\gamma_2=1=y=\beta_2;\ \nu_1=1+\alpha,\ \lambda_2=-1$ तथा x को $1/x$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!}{(-n^2x)^n}L_n^{(\alpha)}(x)\right\}=e^{-1/x} \tag{3.5}$$

प्रमेय 2

समीकरण (2.2) में $C=P=0=\beta_1=\beta_2,\ \alpha_1=\alpha_3,\ \gamma_1=\gamma_3$ तथा $x=\cos\mu/n$ रखने पर हमें

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,[(h_H)]_n\,[k_K)]_n\,[(q_Q)]_n\,[(u_U)]_n\,z_{\gamma_1 n}\,(n^{(\overset{*}{z}_1+\overset{*}{z}_2)/\overset{*}{\alpha}_1}\cos\mu/n,\,Y)}{[(a_A)]_n\,[(b_B)]_n\,[(d_D)]_n\,[(e_E)]_n(\cos\mu/n)^{\alpha_1 n}\lambda^n_1\,n^{((z_1+z_2)/\alpha_1)^{\alpha_1 n}}}\right\}$$

$$=F\left[\begin{matrix}(f_F); & \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{z_1}}\\ (\nu_V); & \end{matrix}\right]F\left[\begin{matrix}(g_G); & \lambda_3 y^{\beta_3}\\ (w_W); & \lambda_1\end{matrix}\right] \tag{3.6}$$

उपपत्ति

यदि समीकरण (3.6) के वामपक्ष को J_2 से प्रदर्शित करें तो

$$J_2=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=0}^{[n/z_1]}\sum_{l=0}^{n}\frac{(1-(k_K)-n)_l\,(1-(u_U)-n)_l\,(-n)_l\,[(g_G)]_l}{(1-(b_B)-n)_l\,(1-(e_E)-n)_l\,[(w_W)]_l}\right.$$

$$\cdot\frac{\Delta_m[z_3;1-(h_H)-n]\,\Delta_m[z_3;1-(k_K)-n+l]}{\Delta_m[z_3;1-(a_A)-n]\,\Delta_m[z_3;1-(b_B)-n+l]}$$

$$\cdot \frac{\triangle_m [z_1; 1-(q_Q)-n] \triangle_m [z_1; 1-(u_U)-n+l] \triangle_m [z_1;-n+l]}{\triangle_m [z_1; 1-(d_D)-n] \triangle_m [z_1; 1-(e_E)-n+l]\ l!}$$

$$\cdot \frac{[(f_F)]_m (-1)^{(K+U+1-B-E)l} \cdot (-z_3)^{z_3(H+K-A-B)m}}{n^{(\overset{*}{z_1}+\overset{*}{z_2})m}}$$

$$\cdot \frac{\lambda_2^m \lambda_3^l n^{\overset{*}{z_3} l} y^{\beta_3 l}}{(\cos \mu/n)^{\overset{*}{\alpha_1} m}} \Bigg\}$$

यहाँ प्रसार सूत्र

$$\triangle_m [z_3; 1-(h_H)-n] = \left(\frac{n}{-z_3}\right)^{z_3 m H} \prod_{i=1}^{z_3} \left(1 + \frac{(h_H)-i}{n}\right)_m$$

तथा इसी प्रकार के अन्य सूत्रों को प्रयुक्त करने पर निम्नलिखित इच्छित फल प्राप्त होता है

$$J_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(f_F)]_m [(g_G)]_m \lambda_2^m \lambda_3^l\ y^{\beta_3 l}}{[(v_V)]_m [(w_W)]_l \lambda_1^{z_1 m+l} m!\ l!}$$

$$F = \left[\begin{matrix}(f_F); \\ (v_V):\end{matrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_1^z}\right] \cdot F\left[\begin{matrix}(g_G); \\ (w_W);\end{matrix} \frac{\lambda_3 y^{\beta_3 l}}{\lambda_1}\right]$$

विशिष्ट दशायें

समीकरण (3.2)—(3.5) के लिये प्रयुक्त मानों से प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं

(i) $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n!}{(1+\alpha)_n} (n^2 \cos \mu/n)^{-n}\ P_n^{(\alpha,\beta)} \left(\frac{n^2 \cos \mu/n+1}{n^2 \cos \mu/n-1}\right)\right\} = \Gamma(1+\alpha)\ I_\alpha\ (2)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left\{(n \cos \mu/n)^{-n} (n^2 \cos^2 \mu/n-1)^{n/2}\ P_n\left(\frac{n \cos\ \mu/n}{n^2\ \cos^2 \mu/n-1}\right)\right\} = I_0\ (1)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \{2n \cos \mu/n\}^{-n}\ H_n\ (n \cos \mu/n) = e^{-1/4}$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \left\{ (-1)^n\ n!\ (n^2 \cos \mu/n)^{-n}\ L_n^{(\alpha)} (n^2 \cos \mu/n)\right\} = 1/e$

इसी प्रकार शेष अन्य प्राचलों के विशिष्ट मानों के लिये अन्य बहुपदों के लिये निष्कर्ष प्राप्त कर सकते हैं।

निर्देश

1. लॉरसेला, जी०, **रेन्ड० सर्क० पैलेरमो०**, 1893, 7, 11-158.

2. पाण्डेय, आर० एन०, तिवारी, एन० के० तथा पाण्डेय, एस० के०, (**प्रेषित**) 1984

3. रेनविल, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन कं० न्यूयार्क 1960

4. विलन, जे० ए०, SIAM J. Math. Anal. 1980, **11(4)**, 690-701.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

छद्म स्थिर चुम्बकीय तरल प्रवाह के कुछ ज्यामितीय गुण

एस० बी० सिह तथा एच० एल० अग्रवाल
गणित विभाग, फैकल्टी आफ साइन्स
बनारस हिन्दू युनिर्वसिटी, वाराणसी-5

[प्राप्त—फरवरी 2, 1985]

सारांश

छद्म स्थिर चुम्बकीय तरल प्रवाह को नियंत्रित करने वाले मूल समीकरणों के अन होलोनामी अंकन का उपयोग करते हुए भौतिक महत्व के कतिपय परिणामों को प्राप्त किया गया है। वे प्रतिबन्ध निकाले गये हैं जिनके अन्तर्गत निकाय की यांत्रिक ऊर्जा प्रवाह रेखा के अनुदिश अचर रहती है।

Abstract

Some geometric properties of pseudo-stationary magneto fluid flows. *By* H. L. Agrawal, and S. B. Singh Department of Mathematics, Faculty of Science, Banaras Hindu University, Varanasi.

By employing the anholonomic description of basic equations governing pseudo-stationary magneto fluid flows, certain geometric results of physical importance are obtained. Conditions are derived for which mechanical energy of the system remains constant along streamlines.

1. विषय प्रवेश

प्रवाह प्राचलों को अवकाशीय चरों तथा *t* का समांगी फलन मानते हुये टाब[1] ने द्विविमीय प्रवाह में प्रघाती परिघटना के सहसम्बन्ध में वर्ण-रेखाओं के गुणों का अध्ययन किया। विभिन्न शोध-कर्ताओं ने[2–4] प्रवाह परिघटना के ज्यामितीय पहलुओं का अध्ययन किया।

प्रस्तुत शोधपत्र में ऊर्जा संरक्षी चुम्बकीय तरल के छद्म स्थिर प्रवाह रेखा के ज्यामिति पर विचार किया गया है। मारिस तथा पासमैन[5] के ज्यामितीय परिणामों का उपयोग करके हमने दिखाया है कि यदि चुम्बकीय क्षेत्र रेखायें प्रवाह रेखाओं के उपाभिलम्ब हों तो चुम्बकीय तरल प्रवाह की भाँति यान्त्रिक ऊर्जा शून्य नहीं होती है। हमने यह भी दिखाया है कि तरल का वेग तथा दाब चुम्बकीय क्षेत्र रेखाओं के साथ साथ अचर होते हैं।

2. मूल समीकरण

चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में अनन्त विद्युतचालकता वाले अश्यान सम्पीड्य तरल के छद्म स्थिर प्रवाह को नियंत्रित करने वाले समीकरण निम्नलिखित हैं.

$$\text{div}\,(\rho \mathbf{u}) + 3\rho = 0, \tag{1}$$

$$\rho(\mathbf{u}\,.\,\text{grad})\,\mathbf{u} + \text{grad}\,p = \mu\,\text{curl}\,\mathbf{H} \times \mathbf{H}, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}\,.\,\text{grad}\,s = 0, \tag{3}$$

$$\text{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}) + 2\mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

$$\text{div}\,\mathbf{H} = 0, \tag{5}$$

$$\rho = \rho(p, s), \tag{6}$$

जबकि $\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \rho, s$ तथा μ क्रमश: वेग सदिश, चुम्बकीय क्षेत्र सदिश, तरल दाब, तरल घनत्व, बिशिष्ट एण्ट्रापी तथा अचर चुम्बकीय पारगम्यता हैं ।

(2), (4) तथा (5) में $\mathbf{h} = \sqrt{\mu}\mathbf{H}$ रखकर हम पाते हैं कि

$$\rho(\mathbf{u}\,.\,\text{grad})\mathbf{u} + \text{grad}\,p^* = (\mathbf{h}\,.\,\text{grad})\mathbf{h}, \tag{7}$$

$$\mathbf{u}\,.\,\text{grad}\,\mathbf{h} - \mathbf{h}\,.\,\text{grad}\,\mathbf{u} + \mathbf{h}\,\text{div}\,\mathbf{u} + 2\mathbf{h} = 0 \tag{8}$$

तथा

$$\text{div}\,\mathbf{h} = 0. \tag{9}$$

जबकि

$$p^* = p + \frac{1}{2}h^2,$$

सम्पूर्ण चुम्बकीय दाब तथा $\mathbf{h}$ चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता है ।

3. ज्यामितीय परिणाम

आइये प्रवाह रेखाओं पर विचार करें तथा उस बिन्दु पर जहाँ वक्रता शून्य न हो प्रसामान्य लाम्बिक आधार $\mathbf{s}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ को प्रस्तुत करें । $\mathbf{s}, \mathbf{n}$ तथा $\mathbf{b}$ प्रवाह रेखा के स्पर्शी, मुख्य अभिलम्ब तथा उपाभिलम्ब के साथ मात्रक सदिश है ।

मारिस तथा पासमैन[5] द्वारा प्रदत्त ज्यामितीय परिणाम निम्नलिखित हैं ।

$$\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta s} = K_s \mathbf{n}$$

$$\frac{\delta \mathbf{n}}{\delta s}=-K_s\mathbf{s}+\tau_s\mathbf{b} \tag{10}$$

$$\frac{\delta \mathbf{b}}{\delta s}=-\tau_s\mathbf{n}$$

$$\text{div } \mathbf{s}=\mathbf{sn}K_s+\mathbf{nn}\,\theta_{ns}+\mathbf{nb}\frac{1}{2}(\psi_s+\Omega_s)$$

$$+\ \mathbf{bn}\frac{1}{2}(\psi_s-\Omega_s)+\mathbf{bb}\ \theta_{bs}, \tag{11}$$

$$\text{div } \mathbf{n}=-\mathbf{ss}\ K_s+\mathbf{sb}\ \tau_s-\mathbf{ns}\ \theta_{ns}$$

$$-\mathbf{nb}\text{ div }\mathbf{b}-\mathbf{bs}\frac{1}{2}(\psi_s-\Omega_s)$$

$$+\mathbf{bb}\ (K_s+\text{div }\mathbf{n}),$$

$$\text{div } \mathbf{b}=-\mathbf{sn}\ \tau_s-\mathbf{ns}\ \frac{1}{2}(\psi_s+\Omega_s)+\mathbf{nn}\text{ div }\mathbf{b}$$

$$-\mathbf{bs}\ \theta_{sbs}-\mathbf{bn}\ (K_s+\text{div }\mathbf{n})$$

तथा $$\text{curl } \mathbf{s}=\Omega_s\ \mathbf{s}+K_s\ \mathbf{b} \tag{12}$$

$$\text{curl } \mathbf{n}=-\text{div } \mathbf{bs}+\Omega_n\ \mathbf{n}+\theta_{ns}\ \mathbf{b},$$

$$\text{curl } \mathbf{b}=(K_s+\text{div }\mathbf{n})\ \mathbf{s}-\theta_{bs}+\mathbf{n}\Omega_b\ \mathbf{b}$$

जहाँ K_s, τ_s तथा Ω_s s-रेखा के वक्रता, ऐंठन तथा अपसामान्यताएँ हैं । Ω_n तथा Ω_b क्रमशः **n**-रेखाओं तथा **b**-रेखाओं की अपसामान्यताएँ हैं । $\theta_{ns}=\mathbf{n}\ .\ \text{grad s}\ .\ \mathbf{n}$ तथा $\theta_{is}=\mathbf{b}\ .\ \text{grad s}\ .\ \mathbf{b}$ s नलियों के क्रमशः **n**-रेखाओं तथा **b**-रेखाओं के साथ निरूपण हैं ।

$$\psi_s=\Omega_b-\Omega_n,\ \Omega_b=-2\tau_s+\Omega_s-\Omega_n,\ \Omega_s=\text{S. curl }\mathbf{s}$$

तथा $$\frac{\delta}{\delta s}=\text{s . grad.}$$

प्रवाह रेखाओं की ज्यामिति

इस अनुभाग में हम प्रवाह रेखाओं की ज्यामिति की विवेचना करेंगे । सदिश **u** तथा **h** को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\text{(a)}\quad \mathbf{u}=q\mathbf{s} \tag{13}$$

$$\text{(b)}\quad =\mathbf{h}_s\ \mathbf{s}+h_n\ \mathbf{n}+h_b\ \mathbf{b}$$

जबकि h_s, h_n, h_b चुम्बकीय क्षेत्र की क्रमशः स्पर्शी, मुख्य अभिलम्ब तथा उपाभिलम्ब के अनुदिश घटक हैं।

(10)-(12) तथा (13) का (7) एवं (8) में उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\delta p^*}{\delta s}+\rho q\left[\frac{\delta p}{\delta s}+1\right]-\left[h_s\frac{\delta h_s}{\delta s}+h_n\frac{\delta h_s}{\delta n}+h_b\frac{\delta h_s}{\delta b}\right.$$
$$+h_n h_b(2\tau_s+2\Omega_n-\Omega_s)-h_s h_n K_s$$
$$\left.-h_n^2\theta_{ns}-h_b^2 e_{bs}\right]=0, \tag{14}$$

$$\frac{\delta p^*}{\delta n}+\rho p^2 K_s-\left[h_s\frac{\delta h_n}{\delta s}+h_n\frac{\delta h_n}{\delta n}+h_b\frac{\delta h_n}{\delta b}\right.$$
$$+h_s h_n\theta_{ns}+h_n h_b \operatorname{div}\mathbf{b}-h_s h_b(2\tau_s+\Omega_n)$$
$$\left.-h_b^2(K_s+\operatorname{div}\mathbf{n})+h_s^2 K_s\right]=0, \tag{15}$$

$$\frac{\delta p^*}{\delta b}-\left[h_s\frac{\delta h_b}{\delta s}+h_n\frac{\delta h_b}{\delta n}+h_b\frac{\delta h_b}{\delta b}+b_s h_n(\Omega_s-\Omega_n)\right.$$
$$\left.+h_n h_b(K_s+\operatorname{div}\mathbf{n})+h_b h_s\theta_{bs}-h_n^2\operatorname{div}\mathbf{b}\right]=0, \tag{16}$$

$$q\frac{\delta h_s}{\delta s}-h_n\frac{\delta q}{\delta n}-h_b\frac{\delta q}{\delta b}-qh_n K_s+qh_s\operatorname{div}\mathbf{s}+h_s=0, \tag{17}$$

$$h_n+qh_b\Omega_n=0, \tag{18}$$

और

$$qh_n\tau_s+q\frac{\delta h_b}{\delta s}+qh_n(\tau_s+\Omega_n-\Omega_s)-qh_b\theta_{bs}$$
$$+qh_s\operatorname{div}\mathbf{s}+h_b\frac{\delta q}{\delta s}+h_b=0 \tag{19}$$

विशिष्ट प्रवाह

माना प्रवाह क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र रेखायें प्रवाह रेखाओं के दिष्टकारी तल में हैं। अतः $h_n=0$ तथा समीकरण (18) से (19) तक क्रमशः निम्नलिखित में समानीत जाते हैं।

$$\frac{\delta p^*}{\delta s}+\rho q\left[\frac{\delta q}{\delta s}1+\right]-\left[h_s\frac{\delta h_s}{\delta s}+h_b\frac{\delta h_s}{\delta b}-h_b^2\theta_{bs}\right]=0, \tag{20}$$

$$\frac{\delta p^*}{\delta n}+\rho q^2 K_s-\left[--h_s h_b(2\tau_s+\Omega_n)-h_b^2(K_s+\text{div }\mathbf{n})+h_s^2 K_s\right]=0, \tag{21}$$

$$\frac{\delta p^*}{\delta b}-\left[h_s\frac{\delta h_b}{\delta b}+h_b\frac{\delta h_b}{\delta b}+h_b h_s \theta_{bs}\right]=0, \tag{22}$$

$$p\frac{\delta h_s}{\delta s}-h_b\frac{\delta q}{\delta b}+qh_s\text{ div s}+h_s=0, \tag{23}$$

$$qh_b\,\Omega_n=0 \tag{24}$$

तथा

$$q\frac{\delta h_b}{\delta_s}-qh_b\,\theta_{bs}+qh_b\text{ div s}+h_b\frac{\delta q}{\delta s}+h_b=0 \tag{25}$$

हम समीकरण (24) पर विचार करेंगे। चूंकि q शून्य नहीं होता है अतः या तो $h_b=0$ तथा $\Omega_n=0$ किन्तु h_b का शून्य होना बताता है कि प्रवाह संरेखण है। इसलिये यह मानकर कि प्रवाह संरेखण नहीं है हम पाते हैं कि

$$\Omega_n=0 \tag{26}$$

जो कि $\mathbf{n}\,.\,\text{curl }\mathbf{n}=0$ के तुल्य है।

यह **n**-रेखाओं के अभिलम्ब द्विप्राचल वक्रों के अस्तित्व में होने का आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध है। इससे निम्नलिखित प्रमेय की प्राप्ति होती है।

प्रमेय

यदि चुम्बकीय क्षेत्र रेखायें छद्म स्थिर प्रवाह के प्रवाह रेखाओं के दिष्टकारी तल में हों तो **n**-रेखाओं का परिवार अभिलम्ब द्विप्राचल वक्र होता है। प्रवाह रेखायें अल्पान्तरी होती हैं तथा उनके उपाभिलम्ब अल्पान्तरी समान्तरक होते हैं।

यदि चुम्बकीय रेखायें प्रवाह रेखाओं के उपाभिलम्ब के अनुदिश हों अर्थात् $h_n=0, h_s=0$ तथा $\bar{h}_b=h$ तो उस दशा में समीकरण (20) से (25) तथा क्रमशः निम्नलिखित में समानीत हो जाते हैं।

$$\frac{\delta p^*}{\delta s}+\rho q\left[\frac{\delta q}{\delta s}+1\right]+h^2\,\theta_{bs}=0, \tag{27}$$

$$\frac{\delta p^*}{\delta n}+\rho q^2 K_s+h^2(K_s+\text{div }\mathbf{n})=0, \tag{28}$$

$$\frac{\delta p}{\delta b}=0, \tag{29}$$

$$h\frac{\delta q}{\delta b}=0, \tag{30}$$

$$\Omega_n=0, \tag{31}$$

$$q\frac{\delta h}{\delta s}+h\frac{\delta q}{\delta s}+qh\,\theta_{ns}+\frac{h}{q}=0, \tag{32}$$

$$\frac{\delta}{\delta s}\ln hq+\theta_{ns}+\frac{1}{q}=0, \tag{33}$$

समीकरण (29) तथा (30) से हम देखते हैं कि तरल का दाब तथा वेग का परिमाण प्रवाह रेखाओं के उपाभिलम्ब के अनुदिश अचर होते हैं।

सूर्य नारायण[6] ने दिखाया है कि

$$\frac{\delta s}{\delta}(qh\sin a)=0 \tag{34}$$

जहाँ कि α प्रवाह रेखा तथा चुम्बकीय-क्षेत्र रेखा के बीच का कोण है। यहाँ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, इसलिये

$$\frac{\delta}{\delta s}(qh)=0. \tag{35}$$

(33) तथा (35) से हम पाते हैं कि

$$\theta_{ns}=-\frac{1}{q}. \tag{36}$$

अतः प्रवाह नली का प्रवाह रेखा के मुख्य अभिलम्ब के अनुदिश विरूपण वेग के परिणाम के विलोमानुपाती होता है।

यदि तरल असंपीड्य हो तो समीकरण (3) तथा (6) से परिणाम निकलता है कि $\frac{\delta p}{\delta s}=0$ अतः समीकरण (27) से हम पाते हैं कि

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}\rho q^2\right)+\rho q+h^2\,\theta_{bs}=0 \tag{37}$$

किन्तु θ_{bs} b-रेखाओं की अल्पान्तरी वक्रता है जो चुम्बकीय क्षेत्र रेखायें हैं। इस प्रकार हमने निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया।

प्रमेय

यदि छद्म स्थिर प्रवाह में चुम्बकीय क्षेत्र रेखायें प्रवाह रेखाओं के उपाभिलम्ब हों तथा तरल असंपीड्य हो तो यांत्रिक ऊर्जा प्रवाह रेखाओं के अनुदिश अचर होती है यदि तथा केवल यदि चुम्बकीय क्षेत्र रेखाओं की अल्पान्तरी वक्रता $\left(-\frac{\rho q}{h^2}\right)$ द्वारा दी जाती हो

निर्देश

1. टाब, ए० एच०, Annls. Maths., 1955, **62**, 301-325.
2. पुरुषोत्तम, जी० तथा मधुसूदन, Tensor N. S. 1973, **27**, 73-78.
3. पुरुषोत्तम, जी० तथा अस्वानारायण, सी०, Tensor, N. S. 1979, **33**.
4. मूर्ती, डी० एन०, Tensor, N. S., 1972, **23**.
5. मारिस, ए० डब्लू० तथा पासमैन, एस० एल० , Arch. Rat. Mech. Analys, 1969, **32**, 29-86.
6. सूर्यनारायण, ई० आर०, Rev. Roum.Math. Pures Et. Appl., 1972, **17**, No. 1, 103.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 29, No. 1, 1986

थैलिक अम्ल द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेट के α तथा β-नैफ्थिल ऐमीन संकुल

एस० ए० खान, कु० शीला तिवारी तथा बी० एम० एल० तिवारी
रसायन विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 9, 1984]

सारांश

थैलिक अम्ल द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेट से प्राप्त नैफ्थिल ऐमीन संकुलों का अध्ययन किया गया। वैश्लेषिक आँकड़ों, अवरक्त स्पेक्ट्रम एवं चुंबकीय प्रवृत्ति मापन द्वारा इन संकुलों में Cr (III) का ऐमीन, थैलेट आयन एवं Cr (VI) के साथ सहभागी होना प्रमाणित होता है।

Abstract

α and β-naphthylamine complexes of blue perchromate prepared with phthalic acid. *By* S. A. Khan, Km. Sheela Tiwari and B. M. L. Tiwari, Department of Chemistry, Goverment Science College, Rewa (M. P.).

Naphthyl amine complexes of the blue perchromate prepared with phthalic acid have been studied. Analytical data, i. r. spectra and magnetic moment of the complexes confirm the presence of Cr (III) associated with naphthylamine, phthalate ion and Cr (VI).

नीले परक्रोमेट एवं कार्बनिक नाइट्रोजनी क्षारकों द्वारा निर्मित संकुलों का विस्तृत अध्ययन किया गया है।[1-8] प्रस्तुत प्रपत्र में थैलिक अम्ल द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेट से बनाये गये नैफ्थिल ऐमीन संकुलों का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है।

प्रयोगात्मक

सभी प्रयुक्त रसायन वैश्लेषिक कोटि के थे तथा सभी विलयनों के प्रयोग करने से पूर्व ठंडा कर लिया गया था।

नीला परक्रोमेट :

$NK_2Cr_2O_7$ (50 मिली०), 0·05N थैलिक अम्ल (400 मिली०) एवं 6%H_2O_2 10 मिली०) के मिश्रित विलयन (p_H=2.45) द्वारा बनाया गया ।[5-7]

संकुल :

नीले परक्रोमेट की अलग-अलग α एवं β नैफ्थिल ऐमीनों के (10%) ईथरीय विलयन से क्रिया करा कर संकुलों का निर्माण किया गया । α-नैफ्थिल ऐमीन से हल्के गुलाबी रंग का चूर्ण (A) किन्तु β-नैफ्थिल ऐमीन से काले रंग का चूर्ण (B) प्राप्त हुआ । इन संकुलों को, धोवनों के रंगहीन होने तक, ईथर से धोकर जल-शोषित्र में सुखा लिया गया ।

विश्लेषण :

Cr, C, H, N आदि का आकलन ज्ञात विधियों से किया गया ।[5-8] प्राप्त परिणामों को सारणी 1 में दर्शाया गया है :

सारणी 1

तत्वों की प्रतिशत मात्रा

संकुल	Cr	C	H	N
(A)	14·48	47·12	3·10	4·01
(B)	14·45	47·08	3·08	4·01
प्रस्तावित सूत्र				
R_2 A Cr . Cr O_{10}	14·56	47·06	3·06	3.92

R=α या β-नैफ्थिल ऐमीन अणु, A=थैलेट आयन

धनायनिक एवं ऋणायनिक क्रोमियम :

इनका आकलन पूर्ववर्णित विधि से किया गया[6-7] तथा इनका अनुपात (A−B) में 1 : 1 पाया गया ।

अवरक्त स्पेक्ट्रम :

संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रम KBr डिस्क विधि से[6-7] प्राप्त किये गये । प्रमुख बैंड निम्नलिखित आवृत्तियों (Cm^{-1}) पर पाये गये :

3685-3080, 1680-1480, 1430-1340, 980-840, 792-742 (सभी चौड़े) एवं 1280 (W).

इनके अतिरिक्त 3425, 3345, 3225, 3025, 1400 तथा 1325 Cm^{-1} पर पाये जाने वाले नैफ्थिल ऐमीनों के बैंड अनुपस्थित थे । इन अवलोकनों से पराक्सी समूह एवं थैलेट आयन द्वारा प्रभावित Cr (III)-ऐमीन संकुल निर्माण को समझा जा सकता है ।[9-12]

फ्लुओरोसीन परीक्षण :

संकुल (A—B) द्वारा इस परीक्षण में हरे-पीले रंग की प्रतिदीप्ति प्राप्त होती है जो संकुलों में थैलेट आयनों की द्योतक है ।

चुंबकीय प्रवृत्ति मापन :

25°C पर गोये की विधि द्वारा संकुलों (A—B) का चुंबकीय घूर्ण क्रमशः 3.62 एवं 3.24 (B. M.) पाया गया ।

अणुभार :

संकुलों (A—B) की अविलेय प्रकृति के कारण अणुभार नहीं निकाले जा सके ।

परिणाम-तथा विवेचना

सारणी 1 में दिये गये वैश्लेषिक एवं परिकलित आंकड़ों, धनायनिक एवं ऋणायनिक क्रोमियम का 1 : 1 अनुपात, फ्लुओरोसीन परीक्षण का सकारात्मक होना तथा अवरक्त स्पेक्ट्रमों से परॉक्सी समूह एवं थैलेट आयन द्वारा प्रभावित Cr (III)-ऐमीन संकुल निर्माण का प्रमाणीकृत हो जाना, संकुलों के बोरमेग्नेटन मानों का d^3 इलेक्ट्रानों के तुल्य होना दर्शाता है कि थैलिक अम्ल द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेट के सूत्र को राय[2–8] द्वारा प्रस्तावित सूत्र, $Cr_2^{III}(Cr_2O^{VI}_{10})_3$ से सम्बन्धित होना चाहिये ।

निर्देश

1. श्वार्ज, आर० तथा गीज, एच०, **बर्लि०**, 1932, **65B**, 3041.
2. राय, आर० सी०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1957, **34**, 68.
3. तोमर, ओ० पी०, सिंह, आर० तथा सिंह, जे०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1973, **50**, 209.
4. कुलश्रेष्ठ, ओ० पी० तथा सिंह, डी० आर०, **जर्न० इन्डि केमि० सोसा०**, 1975, **52**, 531.
5. तिवारी, शीला तथा तिवारी, बी० एम० एल०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 1163.
6. तिवारी, शीला, तिवारी, बी० एम० एल० तथा कपूर, ए० एस०, **विज्ञा० परि० अनु० पत्रिका**, 1978, **21**, 173-76.
7. तिवारी, शीला; तिवारी, बी० एम० एल० तथा कपूर, ए० एस०, **विज्ञा० परि० अनु० पत्रिका**, 1979, **22**, 223-27.

8. तिवारी, शीला, तिवारी, बी० एम० एल० तथा कपूर, ए० एस०, **केमि० इरा**, 1979, **15**, 21-22.

9. फरेरो, जे० आर०, Low Frequency Vibrations of Inorganic and Coordination compounds, प्लेनम प्रेस, 1971.

10. जिमनेस्की, एच० ए०, Interpreted ir-spectra, प्लेनम प्रेस, 1967,III.

11. नैकनिसी, के० एन०, Infra-red absorption spectroscopy, नानकोडो क०, 1962.

12. राव, सी० एन० आर०, Chemical applications of infra-red spectroscopy, एकेडमिक प्रेस, 1963.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

एक व्यापकीकृत द्विविम लाप्लास-रूपान्तर के लिये एक प्रमेय

नरोत्तम जोशी

गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय

जयहरिखाल (लैन्सडाउन) गढ़वाल (उ० प्र०)

[प्राप्त—मार्च 28, 1984]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में जगमोहन चन्द्र जोशी[1] द्वारा परिभाषित द्विविम लाप्लास-रूपान्तर के एक व्यापकीकरण के लिये एक वास्तविक प्रतिलोमन प्रमेय की उपपत्ति दी गयी है। साथ ही, एक उदाहरण द्वारा इस प्रमेय की मान्यता को भी प्रदर्शित किया गया है।

Abstract

A theorem for generalized two dimensional Laplace transform. *By* Narottam Joshi, Mathematics Department, Government College, Jaiharikhal (Lansdowne) Garhwal (U. P.).

A real inversion theorem has been proved as a generalization of two-dimensional Laplace transform difined by Joshi.

1. प्रस्तावना

जोशी[1] ने द्विविम लाप्लास-रूपान्तर के एक व्यापकीकरण को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है

$$F(p, q) = \frac{\Gamma(\beta_1+\eta_1+1)\,\Gamma(\beta_2+\eta_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1)\,\Gamma(\alpha_2+\beta_2+\eta_2+1)}\, pq \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (px)^{\beta_1}(qy)^{\beta_2}$$

$$\cdot\, {}_1F_1(\beta_1+\eta_1+1,\, \alpha_1+\beta_1+\eta_1+1;\, -px)\; {}_1F_1(\beta_2+\eta_2+1,\, \alpha_2+\beta_2+\eta_2+1;\, -qy)$$

$$\cdot\, f(x, y)\, dx\, dy \qquad (1.1)$$

जहाँ $\min\{Re\,\beta_1, Re\,\beta_2\} \geqslant 0$ तथा $\min\{Re\,\eta_1, Re\,\eta_2\} > 0$.

2. विधि एवं प्रमुख सूत्र

हम जानते हैं कि यदि फलन $\phi(u, v)$ का संवलन रूपान्तर (जिसकी अष्टि $G(u, v)$ हो) $f(u, v)$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

$$f(u, v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(u-t, v-t')\, \phi(t, t')\, dt\, dt' \tag{2.1}$$

तो संगत प्रतिलोमन संकारक $E(u, v)$ निम्न प्रकार दिया जाता है

$$[E(u, v)]^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux-vy}\, G(x, y)\, dx\, dy \tag{2.2}$$

अतः रूपान्तर (1.1) के लिये प्रतिलोमन संकारक ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम हमने इसे संवलन रूपान्तर के रूप में परिवर्तित किया है। तत्पश्चात् निम्न सूत्रों का प्रयोग किया गया है।

$$\int_{0}^{\infty} t^{s-1}\, {}_1F_1(a, b; -t)\, dt = \frac{\Gamma(b)\, \Gamma(a-s)\, \Gamma(s)}{\Gamma(b-s)\, \Gamma(a)}\, , 0<Re\, b<Re\, a \tag{2.3}$$

$$\Gamma(z)= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{2.4}$$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim z^{a-b},\ z\to\infty \tag{2.5}$$

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)}=(-1)^n \frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)} \tag{2.6}$$

(एर्डेल्यी, आदि[2])

$$\prod_{k=0}^{n} (D_x+a+k)\, [e^{-(a+n)x}\, F(e^x)]=e^{-(a-1)x}\, F^{n+1}(e^x) \tag{2.7}$$

$$\prod_{k=0}^{n} (D_x+a-k)\, [e^{-ax}\, F(e^x)]=e^{(n+1-a)x}\, F^{n+1}(e^x) \tag{2.8}$$

$$\prod_{k=0}^{n} (D_x+a+k)^{-1}\, [e^{-(a-1)x}\, F(e^x)]=e^{-(a+n)x}\, F^{-n-1}(e^x), \tag{2.9}$$

जहाँ $D_x=\frac{d}{dx}$ तथा $F^{-n-1}(x)$ वह फलन है, जिसका $(n+1)$ कोटि का अवकल गुणांक $F(x)$ हो।

(हिर्शमान तथा विडर[3])

3. **वास्तविक प्रतिलोमन प्रमेय**

यदि $f(x, y)$ वर्ग $L(o, \infty)$ का हो तथा समाकल (1.1) अभिसारी हो तो

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+a_1+a_3)}{\{\Gamma(n+1)\}^2\, \Gamma(n+\beta_1+\beta_2)}\, q^{-(\alpha_2+\eta_2+n)}\, D_q^{-n-1}\, q^{\alpha_2}\, D_q^{n+1}\, q^{2n+\beta_2+\eta_2+2}$$

$$.\, D_q^{n+1}\, q^{-\beta_2-1}\, p^{-(\alpha_1+\eta_1+n)}\, D_p^{-n-1}\, p^{\alpha_1}\, D_p^{n+1}\, p^{2n+\beta_1+\eta_1+2}\, D_p^{n+1}$$

$$.\, p^{-\beta_1-1}\, F(p, q)\Big]\, p=\frac{n}{x},\, q=\frac{n}{y} = f(x, y),\ \min\{Re\, p,\ Re\, q\} > 0. \tag{3.1}$$

उपपत्ति

समाकल (1.1) को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$F(p, q) = A\, pq \int_0^\infty \int_0^\infty (px)^{\beta_1} (qy)^{\beta_2}\, {}_1F_1(a_1, b_1; -px)\, {}_1F_1(a_2, b_2; -qy)\, f(x, y)\, dx\, dy, \tag{3.2}$$

जहाँ $a_r = \beta_r + \eta_r + 1$, $b_r = \alpha_r + \beta_r + \eta_r + 1$, $r = 1, 2$ तथा $A = \dfrac{\Gamma(a_1)\, \Gamma(a_2)}{\Gamma(b_1)\, \Gamma(b_2)}$

समीकरण (3.2) में $x = e^{-x}$, $y = e^{-y}$, $p = e^p$ तथा $q = e^q$ रखने पर

$$M(p, q) = A \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{(p-x)(\beta_1+1)}\, e^{(q-y)(\beta_2+1)}\, {}_1F_1(a_1, b_1, -e^{p-x})\, .\, {}_1F_1(a_2, b_2; -e^{q-y})\, h(x, y)\, dx\, dy,$$

जहाँ $M(p, q) = F(e^p, e^q)$ तथा $h(x, y) = f(e^{-x}, e^{-y})$.

अतः प्रतिलोमन फलन $E(u, v)$ निम्न प्रकार दिया जा सकता है

$$[E(u, v)]^{-1} = A \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{(\beta_1-u+1)x}\, e^{(\beta_2-v+1)y}\, {}_1F_1(a_1, b_1; -e^x)\, .\, {}_1F_1(a_2, b_2; -e^y)\, dx\, dy,$$ (2.2) के प्रयोग से

$$= A \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\beta_1-u}\, {}_1F_1(a_1, b_1; -x)\, y^{\beta_2-v}\, {}_1F_1(a_1, b_2; -y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{\Gamma(\beta_1-u+1)\, \Gamma(\beta_2-v+1)\, \Gamma(\eta_1+u)\, \Gamma(\eta_2+v)}{\Gamma(a_1+\eta_1-u)\, F(a_2+\eta_2-v)}$$ (2.3) के उपयोग से

बशर्ते $o < Re(\beta_1-u+1) < Re(\beta_2-v+1)$ तथा $o < Re(\beta_2-v+1) < Re(\beta_2+\eta_2+1)$.

अब

$$E(D_p, D_q)\{M(p, q)\}=h(p, q)$$

या

$$\frac{\Gamma(a_1+\eta_1-D_p)\,\Gamma(a_2+\eta_2-D_q)}{\Gamma(\beta_1-D_p+1)\,\Gamma(\beta_2-D_q+1)\,\Gamma(\eta_1+D_p)\,\Gamma(\eta_2+D_q)}\{F(e^p, e^q)\}f(e^{-p}, e^{-q})$$

या

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha_1+\alpha_2+D_p+D_q}}{(n\,!)^2\,n^{\beta_1+\beta_2}}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(D_p-\beta_1-1-k)\prod\limits_{k=0}^{n}(D_p+\eta_1+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(a_1+\eta_1+D_p+k)\prod\limits_{k=0}^{n}(a_2+\eta_2+D_q+k)}$$

$$\cdot\prod_{k=0}^{n}(D_q-\beta_2-1-k)\prod_{k=0}^{n}(D_q+\eta_2+k)\,[F(e^p, e^q)]=f(e^{-p}, e^{-q})$$ (2.4) के प्रयोग से

या

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+a_1+a_2)\,n^{D_p+D_q}}{\{\Gamma(n+1)\}^2\,\Gamma(n+\beta_1+\beta_2)}\,e^{-(\alpha_2+\eta_2+n)q}\,D_q^{-n-1}\,e^{\alpha_2 q}\,D_q^{n+1}$$

$$\cdot\,e^{(2n+\beta_2+\eta_2+2)q}D_q^{n+1}\,.\,e^{-(\beta_2+1)q}\,e^{-(\alpha_1+\eta_1+n)p}\,D_p^{-n-1}\,e^{\alpha_1 p}$$

$$\cdot\,D_p^{n+1}\,e^{(2n+\beta_1+\eta_1+2)p}D_p^{n+1}\,e^{-(\beta_1+1)p}\,F(e^p, e^q)=f(e^{-p}, e^{-q}),$$

(2.5), (2.7), (2.8) तथा (2.9) के उपयोग से (3.3) को मूल चरों में प्रत्यावर्तित करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

अब हम एक उदाहरण द्वारा (3.1) की मान्यता को प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण

माना

$$f(x, y)=\frac{\Gamma(a_1+\eta_1+\mu-\gamma+1)\,\Gamma(a_2+\eta_2+\mu-\gamma+1)}{\Gamma(\beta_1+\gamma-\mu)\,\Gamma(\beta_2+\gamma-\mu)\,\Gamma(\eta_1+\mu-\gamma+1)\,\Gamma(\eta_2+\mu-\gamma+1)}$$

$$\cdot\,(xy)^{\gamma-\mu+1}\,{}_3F_4\left\{\begin{matrix}\gamma,\ \gamma-\mu-\eta_1,\ \gamma-\mu-\eta_2\\ \beta_1+\gamma-\mu,\ \beta_2+\gamma-\mu,\ \gamma-\mu-a_1-\eta_1,\ \gamma-\mu-a_2-\eta_2\end{matrix};\ -axy\right\}$$

तब

$$F(p,q)=\frac{(pq)^{\mu+1}}{(pq+a)^{r}} \qquad \text{(जोशी[4])}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+r)}{\Gamma(\gamma)}\frac{(-a)^{r}}{r\,!}(p,q)^{\mu-\gamma-r+1}$$

अब

$$D_p^{n+1}\,p^{-\beta_1-1}F(p,q)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-a)^{r}}{r\,!}\frac{\Gamma(\gamma+r)}{\Gamma(\gamma)\,q^{\gamma-\mu+r-1}}\cdot\frac{\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r+1)}{\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r-n)}\cdot p^{\mu-\gamma+\eta_1+n+1-r}$$

$$D_p^{n+1}\,p^{2n+\beta_1+\eta_1+2}\,D_p^{n+1}\,p^{-\beta_1-1}F(p,q)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-a)^{r}\,\Gamma(\gamma+r)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma-r+\eta_1+n+2)}{r\,!\,\Gamma(r)\,q^{\gamma-\mu+r-1}\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r-n)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_2-r-n)}\,p^{\mu-\gamma+\eta_1-r}$$

तथा

$$p^{-(\alpha_1+\eta_1+n)}\,D_p^{-n-1}\,p^{\alpha_1}\,D_p^{n+1}\,p^{2n+\beta_1+\eta_1+2}\,D_p^{n+1}\,p^{-\beta_1-1}F(p,q)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-a)^{r}\,\Gamma(\gamma+r)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma-r+\eta_1+n+2)}{r\,!\,\Gamma(r)\,q^{\gamma-\mu+r-1}\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r-n)\,\Gamma(\mu-\gamma-r+1)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\mu-\gamma+a_1+\eta_1-r+2)}{\Gamma(\mu-\gamma+a_1+\eta_1-r+n+2)}\,p^{\mu-\gamma-r+1}$$

इसी प्रकार D_q-संकारकों का उपयोग करने पर हम निम्न परिणाम प्राप्त कर सकते हैं

$$q^{-(\alpha_2+\eta_2+n)}\,D_q^{-n-1}\,q^{\alpha_2}\,D_q^{n+1}\,q^{2n+\beta_2+\eta_2+2}\,D_q^{n+1}\,q^{-\beta_2-1}\,p^{-(\alpha_1+\eta_1+n)}$$

$$D_p^{-n-1}\,p^{\alpha_1}\,D_p^{n+1}\,p^{2n+\beta_1+\eta_1+2}\,D_p^{n+1}\,p^{-\beta_1-1}F(p,q)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}$$

$$\frac{(-a)^{r}\,\Gamma(\gamma+r)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_2-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma-r+\eta_2+n+2)\,\Gamma(\mu-\gamma+\alpha_2+\eta_2-r+2)}{r\,!\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_2-r-n)\,\Gamma(\mu-\gamma-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma+a_1+\eta_1-r+n+2)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma-r+\eta_1+n+r)\,\Gamma(\mu-\gamma+\alpha_1+\eta_1-r+2)}{\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r-n)\,\Gamma(\mu-\gamma-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma+\alpha_1+\eta_1-r+n+2)}\,(pq)^{\mu-\gamma-r+1}$$

अतः

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\alpha_2)}{\{\Gamma(n+1)\}^2\,\Gamma(n+\beta_1+\beta_2)}\, q^{-(\alpha_2+\eta_2+n)}\, D_q^{-n-1}\, q^{\alpha_2}\, D_q^{n+1}\, q^{2n+\beta_2+\eta_2+2}$$

$$\cdot\, D_q^{n+1}\, q^{-\beta_2-1}\, p^{-(\alpha_1+\eta_1+n)}\, D_q^{-n-1}\, p^{\alpha_1}\, D_p^{n+1} p^{2n+\beta_1+\eta_1+2} D_p^{n+1}\, p^{-\beta_1-1}\, F(p,q)\Big]_{p=\frac{n}{x}\;q=\frac{n}{y}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\alpha_2)}{\{\Gamma(n+1)\}^2\,\Gamma(n+\beta_1+\beta_2)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+r)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_2-r+1)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_2-r-n)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\mu-\gamma-r+\eta_2+n+2)\,\Gamma(\mu-\gamma+\alpha_2+\eta_2-r+2)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r+1)}{\Gamma(\mu-\gamma-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma+\alpha_2+\eta_2+n-r+2)\,\Gamma(\mu-\gamma-\beta_1-r-n)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\mu-\gamma-r+\eta_1+n+2)\,\Gamma(\mu-\gamma+\alpha_1+\eta_1-r+2)}{\Gamma(\mu-\gamma-r+1)\,\Gamma(\mu-\gamma+\alpha_1+\eta_1+n-r+2)} \cdot \frac{(-a)^r}{r\,!}\left(-\frac{n^2}{xy}\right)^{\mu-\gamma-r+1}$$

उपर्युक्त में (2.3) तथा (2.6) के उपयोग से हमें $f(x, y)$ प्राप्त हो जाता है, जो संकारक (3.1) की मान्यता को प्रदर्शित करता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डॉ० जगमोहन चन्द्र जोशी, प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, गणित विभाग, रा० स्ना० महाविद्यालय, पिथौरागढ़ के प्रति कृतज्ञता व्यक्त करता हूँ, जो मेरे प्रेरणा के स्रोत हैं ।

निर्देश

1. जोशी, जगमोहन चन्द्र, **पी० एच० डी० थीसिस,** आगरा विश्वविद्यालय, 1963.

2. एर्डेल्यी, ए० आदि, Higher Transcenadental Functions, भाग I मेक्ग्रा-हिल, न्यूयार्क, टोरेन्टो तथा लन्दन 1953,

3. हिर्शमान, आई० आई० तथा विडर, डी० वी०, The Convolution Transform प्रिन्सेटन यूनीवर्सिटी प्रेस, प्रिन्सेटन 1955,

4. जोशी, नरोत्तम, **पी० एच० डी० थीसिस,** कुमायूँ विश्वविद्यालय, 1979.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

बर्नोली तथा आयलर के बहुपदों के द्विचर व्यापकीकरण

वी० एस० राय तथा एस० एन० सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त— जून 14, 1984]

सारांश

इस शोधपत्र में हमने दो चरों वाले बहुपदों $J_n^{(m_1,n_2)}$ $(x; y; a, s, b, c)$ के एक व्यापक वर्ग को पुनः स्थापित किया है जिसे अब तक विभिन्न विद्वानों द्वारा अधीत बर्नोली, आयलर, आयलरीय तथा दूसरे सम्बन्धित बहुपदों के विभिन्न व्यापकीकरणों का एक नवीन विस्तार माना जा सकता है। इन बहुपदों के अध्ययन हमारे संख्या-सिद्धान्त के ज्ञान में काफी योगदान दिया है। शुद्ध तथा मिश्रित पुनरावृत्ति संबन्धों को प्राप्त करने, पूरक कोणांक प्रमेय, श्रेणी निरूपण तथा गुणन-प्रमेय को निकालने के लिये जनक फलन तकनीक का उपयोग किया गया है। यह पाया गया है कि ये फलन एकविमीय उष्मा-विसरण समीकरण के हल हैं।

Abstract

A two-variable generalization of Bernoulli and Euler polynomials. *By* V. S. Rai and S. N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

In this paper, we have introduced a general class of polynomials $J_n^{(m_1,m_2)}$ $(x; y; a, s, b, c)$ in two-variables, which can be thought of a novel extension of various generalizations of Bernoulli, Euler, Eulerian and other related polynomials studied by different scholars so far. The study of these polynomials has contributed much to our knowledge of Theory of numbers. The generating function technique has been used to obtain pure and mixed recurrence relations, complementary arguments theorem, series representation and multiplication theorem. It is observed that these functions happen to be solution of one-dimensional heat diffusion equation.

1. विषय प्रवेश

बर्नोली, आयलर तथा आयलरीय बहुपद विश्लेषण तथा परिमित-अन्तर-कलन के कई भागों में मूलभूत महत्व के हैं तथा इनका विभिन्न क्षेत्रों यथा सांख्यिकी, संख्यात्मक विश्लेषण, संख्या सिद्धान्त

इत्यादि में अनुप्रयोग होता है। पिछले वर्षों में आयलरीय संख्याओं तथा कतिपय व्यापकीकरणों को कई संचयात्मक समस्याओं उदाहरणार्थ, कार्लिट्ज[1,2], डिलान[3], फोएटा[4], इत्यादि में पाया गया है। उपरोक्त बहुपदों के अध्ययन से हमें दो चरों वाले और व्यापक वर्ग के बहुपदी समुच्चय $J_n^{(m_1,m_2)}(x; y; a, s, b, c)$ पर विचार करने की प्रेरणा मिली जो कि कार्लिट्ज[2], क्रोम्बीज[5], काराण्डे थोकारे[6], हुसैन-सिंह[7], प्रभाकर-रेवा[8] तथा राय-सिंह[9] द्वारा प्रदत्त विभिन्न व्यापकीकरणों का नया विस्तार मालूम पड़ता है।

2. परिभाषा

हम निम्नलिखित श्रेणी व्यक्तिकरण द्वारा व्यापक कोटि वाले बहुपदों $J_n^{(m_1,m_2)}x; y; a, s, b, c)$ की परिभाषा देते हैं

$$\frac{a^{m_1+m_2}\ t^{sm_1+2sm_2}\ e^{xt+yt^2}}{(e^t+b-1)^{m_1}\ (e^{t^2}+c-1)^{m_2}}=\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)}(x; y; a, s, b, c)\ \frac{t^n}{n!}, \tag{2.1}$$

जबकि a, b, c वास्तविक संख्यायें हैं $(a\neq 0)$ तथा s अऋणात्मक पूर्णांक है। m_1 तथा m_2 (धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य) कोई पूर्णांक है।

प्राचलों को विशिष्ट मान देने पर हम बहुपदों $J_n^{(m_1,m_2)}(x; y; a, s, b, c)$ तथा दूसरे बहुपदों के बीच निम्नलिखित संबन्ध प्राप्त होते हैं

(i) व्यापकीकृत बर्नोली संख्यायें[5]

$$J_n^{(1,1)}(o; o; 1, 1, o, o)=B_n \tag{2.2}$$

(ii) व्यापकीकृत बर्नौली बहुपद[5]

$$J_n^{(1,1)}(x; y; 1, 1, o, o)=B_n(x; y) \tag{2.3}$$

(iii) व्यापकीकृत आयलर बहुपद[5]

$$J_n^{(1,1)}(x; y; 2, o, 2, 2)=E_n(x; y) \tag{2.4}$$

(iv) व्यापकीय आयलरीय बहुपद[9]

$$J_n^{(1,1)}\left(x; y; 1, o, 1-\frac{1}{b}, 1-\frac{1}{c}\right)=\frac{ab}{(1-a)(1-c)}\ \phi_n(x; y; a, b) \tag{2.5}$$

पुनरावृति संबन्ध

(2.1) के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष में अवकलित करने पर हम पाते हैं कि

$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) \frac{t^{n+1}}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) \frac{t^n}{n!}$$

जो दोनों पक्षों से t^n के गुणांकों की तुलना करने पर निम्नलिखित देता है

$$\frac{\partial}{\partial x} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) = n \, J_{n-1}^{(m_1,m_2)} x; y; a, s, b, c) \qquad (2.6)$$

उसी प्रकार हम पाते हैं कि

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) = n(n-1) \, J_{n-2}^{(m_1,m_2)} (x; y: a, s, b, c) \qquad (2.7)$$

तथा

$$\frac{\partial}{\partial y} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) = n \, (n-1) \, J_{n-2}^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) \qquad (2.8)$$

इस प्रकार (2.7) तथा (2.8) से हम पाते हैं कि

$$\frac{\partial 2}{\partial x^2} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) = \frac{\partial}{\partial y} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y: a, s, b, c) \qquad (2.9)$$

अतः, सारे फलन $J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c)$ एकविमीय उष्मा प्रवाह के हल हैं क्योंकि

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} J_n^{(m_1,m_2)} (x: y; a, s, b, c) = n \, (n-1) \cdots (n-p+1) \, J_{n-p}^{(m_1,m_2]} (x; y; a, s, b, c), \, (n \geqslant p) \qquad (2.10)$$

(2.1) से हम पाते हैं कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)} (x+h; y; a, s, b, c) \frac{t^n}{n!} = \frac{a^{m_1+m_2} \, t^{sm_1+2sm_2} \exp [(x+h) \, t + yt^2]}{(e^t+b-1)^{m_1} \, (e^{t^2}+c-1)^{m_2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) \frac{t^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{h^r \, t^r}{r!} .$$

अन्त में, हम पाते हैं कि

$$J_n^{(m_1,m_2)} (x; h; y; a, s, b, c) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} h^r \, J_{n-r}^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c) \qquad (2.11)$$

इसी भाँति, एक दूसरे पुनरावृत्ति संबन्ध को प्राप्त किया जा सकता है

$$J_n^{(m_1,m_2)}(x+h; y; a, s, b, c) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} h^{n-r} J_r^{(m_1,m_2)}(x; y; a, s. b. c) \tag{2.12}$$

पुनः, जनक संबन्ध (2.1) से हम पाते हैं कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[J_n^{(m_1,m_2)}(x+1; y; a, s, b, c) + (b-1) J_n^{(m_1,m_2)}(x; y; a, b, c) \right] \frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{a^{m_1+m_2} t^{sm_1+2sm_2} \exp(xt+yt^2)}{(e^t+b-1)^{m_1-1}(e^{t^2}+c-1)^{m_2}}$$

$$= a \sum_{n=s}^{\infty} J_{n-s}^{(m_1-1,m_2)}(x; y; a, s, b, c) \frac{t^n}{(n-s)!}$$

इस प्रकार t^n, के गुणांकों की तुलना करने पर पाते हैं कि

$$J_n^{(m_1,m_2)}(x+1; y; a, s, b, c) + (b-1) J_n^{(m_1-1,m_2)}(x; y; a, s, b, c)$$

$$= \frac{an!}{(n-s)!} J_{n-s}^{(m_1,m_2)}(x; y; a, b, c) \tag{2.13}$$

(2.13) में x के स्थान पर (m_1-x-1) हम पाते हैं कि

$$J_n^{(m_1,m_2)}(m_1-x; y; a, s, b, c) + (b-1) J_n^{(m_1,m_2)}(m_1-x-1; y; a, s, b, c)$$

$$= \frac{an!}{(n-s)!} J_{n-s}^{(m_1-1,m_2)}(m_1-x-1; y; a, s, b, c) \tag{2.14}$$

3. पूरक कोणांक प्रमेय

(2.1) में x को m_1-x, के द्वारा प्रतिस्थापन करने पर हम पाते हैं कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)}(m_1-x; y; a, s, b, c) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{a^{m_1+m_2} t^{sm_1+2sm_2} \exp[(m_1-x)t+yt^2]}{(e^t+b-1)^{m_1}(e^{t^2}+c-1)^{m_2}}$$

$$= \frac{a^{m_1+m_2}(-1)^{sm_1}(-t)^{sm_1+2sm_2} \exp[x(-t)+y(-t)^2]}{(b-1)^{m_1}\left\{\exp(-t)+\frac{b}{b-1}-1\right\}^{m_1}\left\{\exp(-t)^2+c-1\right\}^{m_2}}$$

$$=\frac{(-1)^{sm_1}}{(b-1)^{m_1}} \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)} \left(x; y; a, s, \frac{b}{b-1}, c\right) \frac{(-t)^n}{n!},$$

जो सरल करने पर निम्नलिखित देता है ।

$$J_n^{(m_1,m_2)} (m_1-x; y; a, s, b, c) = \frac{(-1)^{sm_1+n}}{(b-1)^{m_1}} J_n^{(m_1,m_2)} \left(x; y; a, s, \frac{b}{b-1}, c\right) \qquad (3.1)$$

(3.1) में x को m_1+x द्वारा प्रतिस्थापन करने पर हम पाते हैं कि

$$J_n^{(m_1,m_2)} (-x; y; a, s, b, c) = \frac{(-1)^{sm_1+n}}{(b-1)^{m_1}} J_n^{(m_1,m_2)} \left(m_1+x; y; z, s, \frac{b}{b-1}, c\right) \qquad (3.2)$$

$J_n^{(m_1,m_2)} (m_1-x; y; a, s, b', c)$ का (2.14) तथा (3.1) में विलोपन करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{(-1)^{sm_1+n}}{(b-1)^{m_1}} J_n^{(m_1,m_2)} \left(x; y; a, s, \frac{b}{b-1}, c\right)$$

$$= (1-b)\, J_n^{(m_1,m_2)} (m_1-x-1; y; a, s, b, c)$$

$$= \frac{an!}{(n-s)!} J_{n-s}^{(m_1-1,m_2)} (m_1-x-1; y; a, s, b, c) \qquad (3.3)$$

अथवा

$$\frac{(-1)^{sm_1+n+m_1}}{(1-b)^{m_1}} J_n^{(m,_1m_2)} \left(x; y; a, s, \frac{b}{b-1}, e\right)$$

$$= (1-b)\, J_n^{(m_1,m_2)} (m_1-x-1; y; a, s, b, c)$$

$$+ \frac{an!}{(n-s)!} J_{n-s}^{(m_1-1,m_2)} (m_1-x-1; y; a, s, b, c) \qquad (3.4)$$

4. श्रेणी रूप

जनक संबन्ध (2.1) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)} (x; y; a, s, b, c \frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{a^{m_1} t^{sm_1} \exp(xt)\, a^{m_2} t^{2sm_2} \exp(yt^2)}{(e^t+b-1)^{m_1} (e^{t^2}+c-1)^{m_2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} R_n^{(m_1)}\ (x; a, s, b)\ \frac{t^n}{n!}\sum_{r=0}^{\infty} R_r^{(m_2)}\ (y; a, s, c)\ \frac{t^{2r}}{r\,!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{n=0}^{[n/2]}\ R_r^{(m_2)}\ (y; a, s, c)\ R_{n-2r}^{(m_1)}\ (x; a, s, b)\ \frac{t^n}{(n-2r)\,!}$$

जो सरल करने पर निम्नलिखित बन जाता है

$$J_n^{(m_1, m_2)}\ (x; y; a, s, b, c)$$

$$=\sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n\,!}{r\,!\,(n-2r)\,!}\ R_r^{(m_2)}\ (y{:}\ a, s, c)\ R_{n-2r}^{(m_1)}\ (x; a, s, b) \tag{4.1}$$

जहाँ कि $R_n^{(m)}\ (x; a, s, b)$ प्रभाकर तथा रेवा[8] द्वारा प्रदत्त बहुपद समुच्चय है। समीकरण (4.1) दर्शाता है कि $J_n^{(m_1, m_2)}\ (x; y; a, s, b, c)$ एक बहुपद समुच्चय है जो कि x में घात n तथा y में घात $[n/2]$ वाला है।

5. गुणन-प्रमेय

हम निम्नलिखित गुणन प्रमेय की स्थापना करेंगे जहाँ k एक धनात्मक पूर्णांक है

प्रमेय 2.

$$J_n^{(m_1, m_2)}\ (m_1\, kx; m_2\, k^2\, y; a, s, b, c)\ =\frac{(1-b)^{(k-1)m_1}\,(1-c)^{(k^2-1)m_2}}{k^{sm_1+2sm_2-n}}$$

$$\cdot\sum_{p_1=o}^{k-1}\ \dots\sum_{p_{m_1}=o}^{k-1}\ \sum_{q_1=o}^{k^2-1}\ \dots\sum_{q_{m_2}=o}^{k^2-1} \frac{1}{(1-b)^{p_1+\dots+p_{m_1}}}$$

$$\cdot\ \frac{1}{(1-c)^{q_1+\dots+q_{m_2}}}\ \cdot\ J_n^{(m_1, m_2)}\Big(m_1 x+\frac{(p_1+\dots p_{m_1})}{k}\ ;\ m_2 y$$

$$+\frac{(q_1+\dots+q_{m_2})}{k^2}\ ;\ a, s, 1-(1-b)^k, 1-(1-c)^{k^2}\Big) \tag{5.1}$$

उपपत्ति

(5.1) को प्राप्त करने के लिये हम, (2.1) के कारण निम्नलिखित सम्बन्ध पाते हैं

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n^{(m_1, m_2)}\ (m_1\, kx; m_2\, k^2\, y; a, b, c)\ \frac{t^n}{n\,!}$$

$$= \frac{a^{m_1+m_2}\ t^{am_1+2sm_2} \exp\,(m_1\,kxt+m_2\,k^2\,yt^2)}{(e^t+b-1)^{m_1}\,(e^{t^2}+c-1)^{m_2}}$$

$$= \frac{(1-b)^{(k-1)m_1}(1-c)^{(k^2-1)m_2}\ a^{m_1*m_2}\ t^{sm_1+2sm_2} \exp\,(m_1\,kxt+m_2\,k^2y\,i^2)}{(\exp kt-(1-b)^k)^{m_1}\,(\exp k^2\,t^2-(1-c)^{k^2})^{m_2}}$$

$$\cdot \left[+1\,\frac{e^t}{1-b}+\ldots+\left(\frac{e^t}{1-b}\right)^{k-1}\right]^{m_1}\left[1+\frac{e^{t^2}}{1-c}+\ldots+\left(\frac{e^{t^2}}{1-c}\right)^{k^2-1}\right]^{m_2}$$

$$= \frac{(1-b)^{(k-1)m_1}\,(1-c)^{(k^2-1)m_2}\ a^{m_1+m_2}\,(kt)^{sm_1+2sm_2}}{k^{sm_1+2sm_2}\,(\exp kt-(1-b)^k)^{m_1}\,(\exp k^2\,t^2-(1-c)^{k^2})^{m_2}}$$

$$\cdot\ e^{[m_1kxt+m_2k^2yt^2]}\left[\sum_{i=o}^{k-1}\frac{\exp it}{(1-b)^i}\right]^{m_1}\left[\sum_{j=o}^{k^2-1}\frac{\exp jt^2}{(1-c)j}\right]^{m_2}$$

$$\frac{a^{m_1+m_2}\,(kt)^{sm_1+2sm_2}\,(1-b)^{k-1)m_1}\,(1-c)^{(k^2-1)m_2}}{k^{sm_1+2sm_2}\,(\exp kt-(1-b)^k)^{m_1}\exp k^2\,t^2-(1-e)^{k^2})^{m_2}}$$

$$\sum_{p_1=o}^{k-1}\ldots\sum_{p_{m_1}=0}^{k-1}\ \sum_{q_1=o}^{k^2-1}\ldots\sum_{q_{m_2}=o}^{k^2-1}\frac{\exp\left[\left(m_1x+\frac{p_1+\ldots+p_{m_2}}{k}\right)kt\right]}{(1-b)^{p_1+\cdots+p_{m_1}}}$$

$$\cdot\ \frac{\exp\left[\left(m_2y+\frac{q_1+\ldots+q_{m_2}}{k^2}\right)k^2\,t^2\right]}{(1-c)^{q_1+\cdots+q_{m_1}}}$$

जहाँ m_1 संकलन 0 से $k-1$ तक तथा m_2 संकलन 0 से k^2-1 तक है। चूंकि. संकलित किये जाने वाले फलन को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(m_1,m_2)}\,(m_1\,kx;\,m_2\,k^2\,y;\,a,\,s,\,b,\,c)\,\frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{(1-b)^{(k-1)m_1}\,(1-c)^{(k^2-1)m_2}}{k^{sm+2sm_2}}$$

$$\cdot\ \sum_{n=o}^{\infty}\ \sum_{p_1=o}^{k-1}\ldots\sum_{p_{m_1}-o}^{k-1}\ \sum_{q_1-o}^{k^2-1}\ldots\sum_{q_{m_2}=o}^{k^2-1}\frac{(kt)^n}{n\,!}$$

$$\cdot\ \frac{J_n^{(m_1,m_2)}\left(m_1x+\frac{p_1+\ldots+p_{m_1}}{k};\,m_2y+\frac{q_1+\ldots+q_{m_2}}{k^2};\,a,s,1-(1-b)^k,1-(-c)^{k^2}\right)}{(1-b)^{p_1+\cdots+p_{m_1}}(1-c)^{q_1+\cdots+q_{m_2}}}$$

जो कि प्रमेय की उपपत्ति को पूरा करता है।

निर्देश

1. कार्लिट्ज, एल०, Duke Math. J. 1972, **39**, 267-280.
2. कार्लिट्ज एल० तथा स्कोविली, आर०, J. fur die reine and angewandte Mathematik, 1974, **265**, 110-137.
3. डिलान, जे० एफ० तथा रोजेली, डी० पी०, SIAM J. Appl. Math., 1969, **17**, 1086-1093.
4. फोएटा, डी० तथा शुट्शेन वर्जर, एम० पी०, Lecture Notes in Mathematics 138; Springer-Verlag, Serline, Heidelberg, New York, 1970.
5. क्रोम्बीज, गिलवर्ट, Ganita 1971, **22**, 131-141.
6. कराण्डे, वी० के० तथा ठाकरे, एन० के०, Ind. J. pure appl. Math., 1975, **6**, 98-107.
7. हुसेन, एम० ए० तथा सिंह, एस० एन०, Ind. J. pure appl. Math., 1978, **9**, 1158-1162.
8. प्रभाकर, टी० आर० तथा रेवा, Ind. J. pure appl. Math., 1979, **10**, 1216-1227.
9. राय, पी० एन० तथा सिंह, यस० एन०, Bull. Cal. Math. Soc. 1980, **72**, 229-232.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

शिकारगंज (जिला सीधी, मध्य प्रदेश) के आसपास विगोपित निम्न विन्ध्यन बालुकाश्मों का एक अध्ययन

अवधेश कुमार शर्मा

शासकीय इंजीनियरिंग महाविद्यालय, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 20, 1985]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में शिकारगंज के आसपास विगोपित निम्न विन्ध्यन बालुकाश्मों का अध्ययन किया गया है जो सोन घाटी का एक भाग है। बेसल समूह के बालुकाश्म भूरे से नीललोहित भूरे, सफेद, लौहमय और मोटे संस्तरण वाले हैं जबकि खेन्जुआ समूह के नील-लोहित रंग के, आर्कोजिक तथा पतले से मोटे संस्तरण के हैं। बेसल बालुकाश्म धारा संस्तरण प्रदर्शित करता है तथा उसके स्फटिक कण उपकोणीय, प्रसामान्य से परिमित शिखर एवं न्यून रीति (Poorly sorted) के हैं। खेन्जुआ बालुकाश्म धारा संस्तरण, क्रमिक संस्तरण, लहरी चिन्ह और पंक विदारण प्रदर्शित करता है जबकि इसके स्फटिक कण प्रसामान्य शिखर एवं परिमित से न्यून रीति वाले हैं। परिणामों से यह स्पष्ट होता है कि बेसल वालुकाश्म अभिविवर्तनिकीय स्थिर मग्न तट क्षेत्र (Tectonically stable shelf area) में एवं खेन्जुआ बालुकाश्म कोष्ण और आर्द्र जलवायु के मग्न तट क्षेत्र में निक्षिप्त हुये हैं।

प्रस्तुत शोध पत्र में शिकारगंज (24·17′उ० : 81·27′ पू०) के पास सोन घाटी के एक भाग में विगोपित निम्न विंध्यन बालुकाश्मों का अध्ययन किया गया है। शिकारगंज रींवा नगर से 40 कि०मी० दक्षिण में स्थित है। सोन नदी कुसमा (24·12′ उ० : 81·18′ पू०) से 25 कि०मी० उत्तर पूर्व में बहने के बाद शिकारगंज के बेसल समूह के स्फटकीय कटक को काटकर उत्तर दिशा में मुड़ जाती है। यहीं पर सोन की सहायक नदी बनास मिलती है।

Abstract

A study of the lower Vindhyan Sandstones around Shikarganj, District Sidhi (M. P.). *By* Awadhesh Kumar Sharma, Department of Civil Engineering, Government Engineering College, Bilaspur, M. P.

A study of the lower Vindhyan sandstones in a part of Son Valley around Shikarganj has been made. The sandstones of basal formation are brown to purple

brown and white, ferruginous and thick bedded while sandstones of Kheinjua are purple in colour, arkosic and thin to thick bedded. Basal sandstones show the current beddings, the quartz grains are subangular, normal to moderately peaked and poorly sorted while Kheinjua sandstones show current beddings, graded beddings, ripple marks and sun cracks, normal peaked and moderately to poorly sorted. Basal sandstones were deposited in a tectonically stable shelf area and Kheinjua sandstones in the shelf area under warm and humid climate.

भू-वैज्ञानिक बनावट

अध्ययन क्षेत्र में केवल सेमरी वर्ग (निम्न विंध्यन) से शैल ही विगोपित हैं (सारणी 1)। इसके सभी उपभाग एक दूसरे से अनुरूप विन्यासों द्वारा अलग हैं। सभी शैलों की नति एवं वलन परिभाग में थोड़ा सा अन्तर है। लेकिन जहाँ ये शैल क्रमबद्ध नहीं मिलते वहाँ नति में सर्वथा तुच्छ अन्तर है। नीचे के दो समूहों (बेसल पारसिलेनाइट) के शैलों में ऊपर के दो समूहों की अपेक्षा नति अधिक है। पारसिलेनाइट में शुद्ध अभिनति एवं अपनति वलन विद्यमान हैं। इनकी तुलना में नीचे के बेसल संस्तर में कम विघ्न उपस्थित है तथा इसकी नति लम्बी दूरियों तक लगभग समान हैं, खेन्जुआ तथा रोहतास समूह के शैलों में कम विघ्न है तथा इनकी नति अपेक्षाकृत कम है। खेन्जुआ समूह का दूसरा गुण है लहरी चिन्हों का मिलना। इस तरह का अन्य कोई चिन्ह या प्रमाण पारसिलेनाइट या बेसल समूह के शैलों में नहीं पाया गया। इससे यह स्पष्ट होता है कि पारसिलेनाइट संस्तरों के बाद निम्नविंध्यन समुद्र धीरे-धीरे उथला होता गया जिससे अधिकाधिक लहरी चिन्हों का आगे के समूहों में निर्माण हुआ।

सारणी 1

अध्ययन क्षेत्र का स्तरी क्रम

अपर विंध्यन		असम विन्यास
नि	से	रोहतास समूह—चूना पत्थर और शैल
म्न	म	खेन्जुआ समूह—ग्लूकोनिटिक संस्तर
विं	री	बालुकाश्म
ध्य	व	आलिव शेल
न	र्ग	पारसिलेनाइट समूह—पारसिलेनाइट
		बेसल समूह=स्फटकीय बालुकाश्म एवं संगुटिकाश्म
		. . . . भ्रंश . . . .
कायान्तरित एवं अवर्गीय स्फटीय शैल।		

शिला-विद्या

बेसल स्फटकीय बालुकाश्म का मुख्य कटक दुर्गापार के पश्चिम से शिकारगंज के पूर्व तक मिलता है। ये बालुकाश्म अत्यधिक लौहमय, नीललोहित से नीललोहित भूरे, सफेद रंगों वाले तथा माध्यम से बड़े कणों वाले हैं। इनमें स्फटिक शिरायें भी मिलती हैं। ये शिरायें वहाँ पर अधिक स्पष्ट हैं जहाँ पर इनका सम्पर्क कायान्तरित एवं अवर्गीय स्फटीय शैलों से है। खेन्जुआ बालुकाश्म के विगोपन शिकारगंज के पश्चिम से लेकर बेलकासा (24·20′ उ० 81·27′ पू०) के पूर्व तक दूर-दूर तक फैले हुये हैं। ये नीललोहित रंग के, मध्यम से बड़े कणों वाले तथा सामान्यतः पतले से मोटे संस्तर वाले हैं। कुछ स्थानों पर ये अत्यधिक वलित एवं भ्रंशित अवस्था में हैं। इस बालुकाश्म का मुख्य गुण ग्लुकोनाइट खनिज की उपस्थिति है।

अवसादी संरचनायें

बेसल बालुकाश्मों में धारा-संस्तरण की बहुलता है जो शिकारगंज के पास सोन नदी के किनारे बहुतायत से मिलते हैं। खेन्जुआ बालुकाश्मों में धारा संस्तरण, स्थानीय और विस्तृत रूप से सोन नदी के किनारे मिलते हैं। ये संस्तरण मुख्यतः जीटा प्रकार के आड़ी रेखा स्तरीकरण है, जिनका निर्माण जल के बहाव के वेग में परिवर्तन होने के कारण हुआ है। इनकी नति सामान्यतः धारा की वहाव की दिशा में ही है। इन बालुकाश्मों में संस्तरण बारदेला के दक्षिण पश्चिम से लेकर खारा (24·18′ उ० 81·29′ पू० के उत्तर पूर्व तक मिलता है। इन संस्तरणों के निर्माण के लिये पंकयुक्त धारा ही मुख्य रूप से उत्तरदायी है। इन बालुकाश्मों में लहरी चिन्हों की अधिकता है तथा नतिलम्ब उत्तर-पूर्व से दक्षिण-पश्चिम में बदलता रहता है। असंमित लहरी चिन्हों को उपस्थिति सिद्ध करती है कि धारा का प्रवाह हमेशा दक्षिण पश्चिम से पूर्व में बदलता रहा था। दोलन दहरी चिन्ह, धारा लहरी चिन्हों के समानान्तर ही मिलते हैं और सम्भवतः इनका निर्माण उथले जल में वायु के क्रिया द्वारा हुआ है। इसके अतिरिक्त पंक विदारण भी अधिकाधिक मिलता है।

शिलातत्व

हस्त नमूनों में बेसल बालुकाश्म विभिन्न रंगों के हैं जिसमें सफेद और मटमैले सफेद अधिक हैं। इनके स्फटिक कण बड़े, सुगठित तथा कठोर है। कुछ बालुकाश्म अधिक लौहमय हैं जिनके कारण इनका रंग भूरा हो गया है। पेटीजान (1951) के वर्गीकरण के अनुसार ये बालुकाश्म ऊर्ध्व स्फटकीय प्रकृति के हैं। अणुवीक्षणीय अध्ययन से पाया गया है कि इनमें स्फटिक सर्वाधिक है जो तरंगित, अतरंगित एवं बहुमणिकीय प्रकार के हैं।

खेन्जुआ बालुकाश्मों का रंग नीलालोहित एवं सफेद भूरा है तथा ये मध्यम से बड़े कणों वाले हैं। इन बालुकाश्मों में स्फटिक, अन्य खनिजों की अपेक्षा अधिक है। धात्र मृण्मय है तथा मुख्य संयोजक पदार्थ सिलिका तथा लौह आक्साइड है। कहीं-कहीं पर कार्बोनेट भी संयोजक पदार्थ के रूप में उपस्थित है। इन बालुकाश्मों में ग्लुकोनाइट खनिज छोटी गेलियों के रूप में दो स्फटिक कणों के बीच में उपस्थित है (सारणी 2)

रूपविषयक परीक्षण

निम्नविंध्यन बालुकाश्मों के आठ तनु काटों का माइक्रोमीटर की सहायता से अध्ययन किया गया (सारणी 2)। परीक्षण से यह तथ्य सामने आया कि बेसल बालुकाश्मों में स्फटिक की मात्रा अधिक है तथा स्फटिक कण आकार में अधिकांशतः उपकोणीय तथा 0·5 से 0·007 मि० मी० के हैं। कहीं कहीं पर स्फटिक के कोणीय कण बड़े कणों से घिरे हुए हैं जो इसके टूटन प्रभाव को दर्शाते हैं। फेलसपार का मुख्यतः अभाव है। खेन्जुआ बालुकाश्मों के स्फटिक कणों का आकार 0·5 से 0·01 मि० मी० के बीच है। फेलसपार में आर्थोक्लेज मिलता है जिनके कणों का आकार 0·45 से 0.01 मि० मी० के बीच है। स्फटिक में टूर्मेलिन, जरकान एवं लौह आक्साइड का समावेश है। ग्लुकोनाइट खनिज मुख्यतः स्फटिक और फेलसपार कणों के सटे किनारों के स्थानों पर मिलता है।

सारणी 2

बालुकाश्मों के विभिन्न घटकों का रूप विषयक प्रतिशत

	बेसल बालुकाश्म					खेन्जुआ बालुकाश्म		
	1	2	3	4	5	1	2	3
तरंगित स्फटिक	37·40	24·0	35·50	32·0	37·00	23·00	26·20	17·00
अतंरगित स्फटिक	36·40	45·40	38·0	33·50	35·80	29·00	23·20	34·00
बहुमणिभीय स्फटिक	7·80	6·60	8·50	9·00	5·00	—	4·40	—
धात्र	11·20	10·00	11·00	11·00	9·20	8·00	10·00	8·00
चार्ट, संयोजक, वृद्धि	5·60	10·00	6·60	3·00	7·00	9·00	7·80	7·00
फेल्सपार	—	—	—	—	—	18·40	24·00	18·00
शैल खंड	0·40	4·00	0.40	0·60	4·40	5·00	—	4 00
अन्य	1·10	—	1·00	0·40	—	7·60	4·00	1·00
योग	99·90	100·00	100·10	99·50	99·50	100·00	99·60	100·00

लेखक द्वारा विश्लेषित

आकार वितरण परीक्षण

बालुकाश्मों के आकार वितरण का परीक्षण इनके तनु काट विधि द्वारा (फ्रीडमेन 1985) किया गया। फाई 5, 16, 25, 75, 84 और 95 का मान कुमुलेटिव वक्र रेखा द्वारा तथा अन्य सांख्यिकीय स्थिर मान निकाला गया (सारणी 3)।

सारणी 3

निम्न विध्यन बालुकाश्मों का आकार वितरण एवं सांख्यिकीय मान

		बेसल बालुकाश्म					
		1		2		3	
साइज ग्रेड (मि॰ मी॰)	साइज ग्रेड ϕ (फाई)	wt%	cum wt%	wt%	cum wt%	wt%	cum wt%
0. 5	1.00	12.20	12.20	13.53	13.50	2.20	2.20
0. 5-0.42	1.00-1.25	6.40	18.60	6.80	20.30	1.40	3.60
0.42-0.35	1.25-1.50	17.00	35.60	16.60	36.90	2.60	6.20
0.35-0.30	1.50-1.75					6.20	12.40
0.30-0.25	1.75-2.00	15.00	50.60	13.60	50.50	6.60	18.40
0.25-0.21	2.00-2.25					3.80	22.20
0.21-0.17	2.25-2.50					11.00	33.20
0.17-0.10	2.50-3.25	30.60	81.20	26.90	77.40	14.00	47.20
0.10-0.08	3.25-3.50					11.60	58.80
0.08-0.05	3.50-4.25	12.60	93.80	13.00	90.40	17.20	76.00
0.05-0.03	4.25-5.00	3.00	96.80	2.60	93.00	19.00	95.00
0.03-0.01	5.00-5.75	3.20	100.0	7.00	100.0	5.00	100. 0

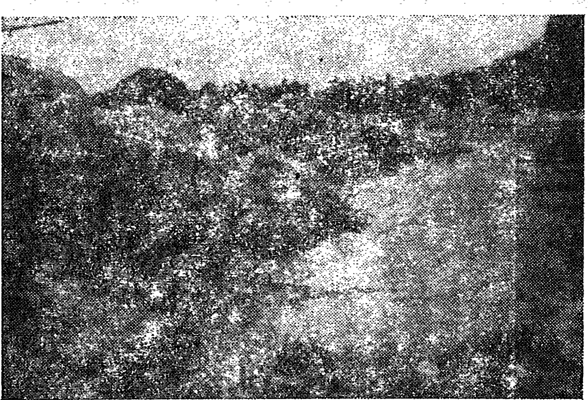
खेन्जुआ बालुकाश्म									
4		5		6		7		8	
wt%	cum wt%	wt%	cum wt%	wt%	cum wt%	wt%	cum wt%	wt%	cum wt%
2.50	2.50	8.40	8.40	1.20	1.20	—	—	—	—
1.70	4.20	12.00	20.40	2.60	3.80	—	—	—	—
2.90	7.10	4.00	24.40	2.20	6.00	—	—	—	—
6.70	13.80	5.20	29.60	7.20	13.20	—	—	—	—
8.80	22.60	4.00	33.60	9.60	22.80	—	—	—	—
3.50	26.10	4.60	38.20	13.20	36.00	—	—	—	—
12.00	38·10	7.20	45.40	18.80	54.80	6.40	6.40	—	—
15.30	53.40	9.20	54.60	17.80	72.60	18.40	24.80	2.00	2.00
11.50	64.90	10.80	65.40	13.00	85.60	22.00	48.80	10.00	12.00
17.00	81.90	12.00	77.40	4.40	90.00	22.60	69.40	28.00	40.00
15.00	96.90	11.80	89.00	7.00	97.00	19.00	88.40	30.60	70.60
3.10	100.0	10.80	100.00	3·00	100.0	11.60	100.0	29.40	100.0

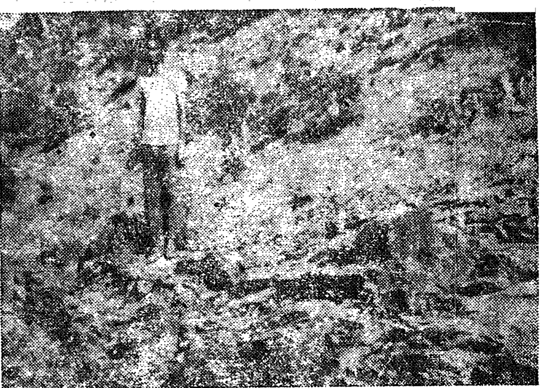
सांख्यिकीय मान	I	II	III
$\phi 5$	0.40	0.2	1.375
$\phi 16$	1.62	1.06	1.895
$\phi 25$	2.26	1.30	2.29
$\phi 50$	2.75	2.25	3.29
$\phi 75$	3.60	3.15	4 25
$\phi 84$	3.70	3.65	4.625
$\phi 95$	4.50	5.15	5.04
माध्यिक Md ϕ	2.75	2.25	3.29
माध्य Mz	2.69	2.32	3.26
तिरछापन SK_1	0.116	0.126	0.046
कुरटोसिस KG	1.25	1.67	0.76
प्रमाणिक विचलन भेद $\sigma\phi$	1.12	1.40	1.23

IV	V	VI	VII	VIII
0.5	0.5	1.375	2.330	2.620
1.15	1.145	1.812	2.160	3.370
1.50	1.50	2.205	3.350	3.550
2.875	2.875	2.44	3.85	4.00
4.10	3.935	3.375	4.250	4.640
5.025	4.645	3.450	4.625	4.950
5.375	5.375	4.625	5.250	5.250
2.875	2.875	2.44	3.85	4.00
3.016	2.888	2.57	3.69	4.10
0.126	0.046	0.28	0.13	0.09
0.76	0.82	0.98	1.36	0.99
1.86	1.75	0.902	0.905	0.780

लेखक द्वारा विश्लेषित

इनके अतिरिक्त 3425, 3345, 3225, 3025, 1400 तथा 1325 cm^{-1} पर पाये जाने वाले नैफ्थिल ऐमीनों के बैंड अनुपस्थित थे। इन अवलोकनों से परौक्सी समूह एवं थैलेट आयन द्वारा प्रभावित Cr(III)-ऐमीन संकुल निर्माण को समझा जा सकता है।[9-12]

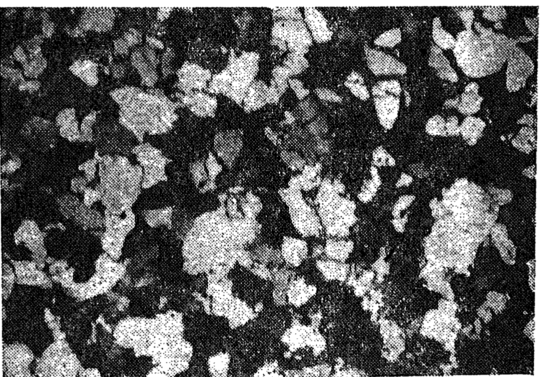




चित्र (1) बेसल समूह के लौहमय बालुकाश्मों का अपावरण (सोन नदी के किनारे, शिकारगंज)

चित्र (2) बेसल स्फटिकीय बालुकाश्म के पतले काट का सूक्ष्मदर्शीय चित्र द्वितीयक वृद्धि के साथ स्फटिक कण जहाँ मृतिका का जमाव (तीर का निशान) मलवे के रूप में हुआ है। निकाल × 35





चित्र (3) वारदेला के दक्षिण में खेन्जुआ बालुकाश्मों का अपावरण

चित्र (4) मध्यम से बड़े कणों वाले खेन्जुआ बालुकाश्म के पतले काट का सूक्ष्मदर्शी चित्र 1 निकाल × 35

बालुकाश्मों के कणों का तिरछापन एवं प्रामाणिक विचलन भेदफील्ड और वार्ड (1957) के सूत्र से एवं कुरटोसिस कार्डिगन (1961) की सारणी से गणना करके निकाला गया। सांख्यिकीय स्थिर मानों से यह स्पष्ट होता है कि बेसल बालुकाश्म प्रसामान्य से परिमित शिखर वाले एवं न्यून रीति के है जबकि खेन्जुआ बालुकाश्म प्रसामान्य शिखर एवं परिमित से न्यून रीति वाले हैं। बेसल बालुकाश्मों का माध्य मान इनके कणों के औसत आकार की ओर इंगित करते हुये यह स्पष्ट करता है कि ये बालुकाश्म माध्यम से बड़े कणों वाले हैं।

शिलाजनि

बेसल बालुकाश्मों में लगभग पृथक स्फटिक भाग, मृण्मय पदार्थों का अभाव एवं शैल खण्डों की न्यून मात्रा यह इंगित करती है कि ये बालुकाश्म उच्च स्तर तक गठित और खनिजीय रूप से पूर्ण परिपक्व हैं। इससे इस बात की भी पुष्टि होती है कि ये बालुकाश्म अभिविवर्तनीय स्थिर मग्न तट क्षेत्र में निक्षिप्त हुये थे जहाँ समुद्रीय धारा द्वारा बालुका कणों का घर्षण और पृथक्कीकरण बहुत अधिक हुआ।

खेन्जुआ बालुकाश्मों के आर्कोजिक प्रकृति से यह स्पष्ट होता है कि ये कोष्ण और आर्द्र जलवायु में मग्न तट क्षेत्र में निक्षिप्त हुये। आधारक पदार्थों द्वारा आच्छादित स्फटिक कणों में द्वितीयक वृद्धि का पूर्ण अभाव यह सिद्ध करता है कि आधारक पदार्थ पहले भी थे। स्फटिक की जनित प्रकार इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि इन शैलों का मातृ प्रदेश विभिन्न शैलों का था जिसमें पातालीय, अम्लीय, आग्नेय और निम्न दर्जे के कायान्तरित शैल प्रमुख थे।

परिणाम तथा विवेचना

1. लहरी चिन्हों एवं पंक विदारण का केवल खेन्जुआ बालुकाश्मों में मिलना यह सिद्ध करता है कि पारसिलेनाइट सस्तरणों के निक्षेपण होने के कारण बाद निम्न विध्यन समुद्र निरंतर उथला होता गया जिसके फलस्वरूप खेन्जुआ समूह में इन अवसादी संरचनाओं का निर्माण हुआ जो स्पष्ट रूप से उपोत्तर वायु परिस्थिति में बारम्बार विगोपन से प्रभावित हुआ। दोलन लहरी चिन्हों का धारा लहरी चिन्हों के समानान्तर होना उसके उथले जल में वायु क्रिया द्वारा निर्माण की पुष्टि करता है जो अवर्गीय स्फटीय एवं कायान्तरित शैलों के क्षेत्रों की तरफ से निरंतर आता रहा।

2. खेन्जुआ बालुकाश्मों में क्रमिक सस्तरणों की उपस्थिति यह स्पष्ट करती है कि विंध्यन समुद्र के निरन्तर उथले होने के कारण धारा पंकयुक्त हो गया था जिसके कारण जल बहाव के वेग में ह्रास होने के क्रमिक संस्तरणों का निर्माण हुआ।

3. शैलों से तनु काटों के सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन से यह परिणाम सामने आया कि बेसल बालुकाश्मों में स्फटिक की मात्रा अधिक है तथा मृण्मय धात्र एवं उपकोणीय खंडों का अंशतः अभाव है। इससे यह सिद्ध होता है कि ये बालुकाश्म खडिजीय एवं गणितीय रूप से उच्च स्तर तक परिपक्व

हैं। इन बालुकाश्मों का निक्षेपण अभिविवर्तनीय स्थिर मग्न तट क्षेत्र में होने के कारण कणों में सर्वाधिक घर्षण हुआ जिससे उनकी बाहरी सतह काफी चिकनी हो गई। खेन्जुआ बालुकाश्मों के आर्कोजिक प्रकृति से यह स्पष्ट होता है कि इनका निक्षेपण कोष्ण आर्द्र जलवायु में मग्न तट क्षेत्र में हुआ है। इसके साथ ही धात्रिकीय स्फटीक कणों में द्वितीयक वृद्धि की अनुपस्थिति यह सिद्ध करती है कि पहले भी धात्र उपस्थित रहा होगा। बालुका सीमेंट की उपस्थिति यह इंगित करती है कि इनका निर्माण बालुकामय ज्वालामुखीय राख संस्तर के आर्द्रकरण के फलस्वरूप हुआ।

4. ग्लुकोनाइट खनिज की उपस्थिति यह दर्शाती है कि इसका निर्माण धारा क्रियाओं से बहुत दूर हुआ है। चूंकि इसका निर्माण महाद्वीपीय तट पर पंक रेखा के पास उथले जल में होता है अतः यह कहा जा सकता है कि निम्न विंध्यन समुद्र के उथले होने के कारण लहरी चिन्हों के साथ साथ इस खनिज का निर्माण हुआ।

सारणी 4

विंध्यन बालुकाश्मों का तुलनात्मक अध्ययन

चरित्र	बेसल बालुकाश्म	खेन्जुआ बालुकाश्म
1. शिला विद्या	भूरे से नीलालोहित भूरे एवं सफेद रंग के, लौहमय, स्फटिक शिरायें उपस्थित, मोटे संस्तरण	नीलालोहित रंग के पतले से मोटे संस्तरण एवं आर्कोजिक
2. अवसादी संरचनायें	धारा संस्तरण	धारा एवं क्रमिक संस्तरण, लहरी चिन्ह, पंक विदारण आदि
3. रूप विषयक गुण	स्फटिक की मात्रा अधिक, उपकोणीय कण, फेल्सपार अनुपस्थित	स्फटीक कण उपकोणीय, फेल्सपार उपस्थित, स्फटिक में टूरमेलीन, जरकान एवं लौह आक्साइड के प्रोद, ग्लुकोनाइट खनिज

4.	आकार वितरण गुण	मध्यम से बड़े कण, प्रसामान्य से परिमित शिखर तथा न्यूनरीति	कणों के आकार में अनियमितता, प्रसामान्य शिखर, परिमित से न्यून रीति
5.	शिलाजनि	अभिविवर्तनीय स्थिर मग्न तट क्षेत्र में निक्षिप्त	कोष्ण आर्द्र जलवायु में मग्न तट क्षेत्र में निक्षिप्त

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर महाराज नारायण मेहरोत्रा, भौमिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, एवं डा० ए० सी० राव, प्राचार्य शासकीय अभियांत्रिक महाविद्यालय, बिलासपुर (म० प्र०) का आभारी है।

निर्देश

1. पेटीजान, एफ० जे०, **सेडिमेंटरी टाक्स**, 1951 न्यूयार्क
2. फ्रीडमेन, जी० एम०, **जर्न० आफ सेडि० पेट्रालाजी**, 1958, 66, 394-416.
3. फोल्क, आर० एल० तथा वार्ड, डब्लू० सी०, **जर्न० आफ० सेडि० पेट्रोलाजी** 1957, 27, 326.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

भारतीय राष्ट्रीय उपग्रह "इनसेट-I"

ओ० पी० एन० कल्ला

चेयरमैन, संचार क्षेत्र,
अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र, अहमदाबाद

तथा

काली शंकर

इलेक्ट्रानिकी इंजीनियर, दिल्ली भू केन्द्र,
अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र, नई दिल्ली

[प्राप्त—मार्च 9, 1985]

सारांश

उपग्रह संचार प्रणाली के बढ़ते महत्व के कारण बहुत से देशों ने अपनी घरेलू संचार समस्या के समाधान के लिये अपने निजी उपग्रह अन्तरिक्ष में छोड़े हुये हैं। इनसैट-I भारत का निजी उपग्रह है, जो भारत की राष्ट्रीय संचार समस्या को सुलझाने में अपना महत्वपूर्ण योगदान दे रहा है। प्रस्तुत लेख में इनसैट-I परियोजना के विभिन्न पहलुओं पर प्रकाश डाला गया है।

Abstract

Indian national satellite INSAT-I. *By* O. P. N. Calla, Chairman, Communication Area, Space Applications Centre, Ahmedabad and Kali Shanker, Electronic Engineer, Delhi Earth Station, Space Applications Centre, Sardar Patel Marg, New Delhi.

Because of increasing importance of satellite communication many countries have launched their own satellites for solving their domestic communication problems. INSAT-I is India's domestic satellite which is helping to solve the national communication needs. In this paper, different aspects of INSAT-I system have been explained.

1. परिचय

भारतीय राष्ट्रीय उपग्रह परियोजना इनसैट-1 (Indian National Satellite INSAT-I) राष्ट्रीय संचार और सामाजिक आवश्यकताओं की पूर्ति करने वाली पहली घरेलू उपग्रह योजना है। इसके उद्देश्य हैं :

(क) दूर संचार (टेलीफोन, डाटा, प्रतिकृति प्रेषण इत्यादि)।

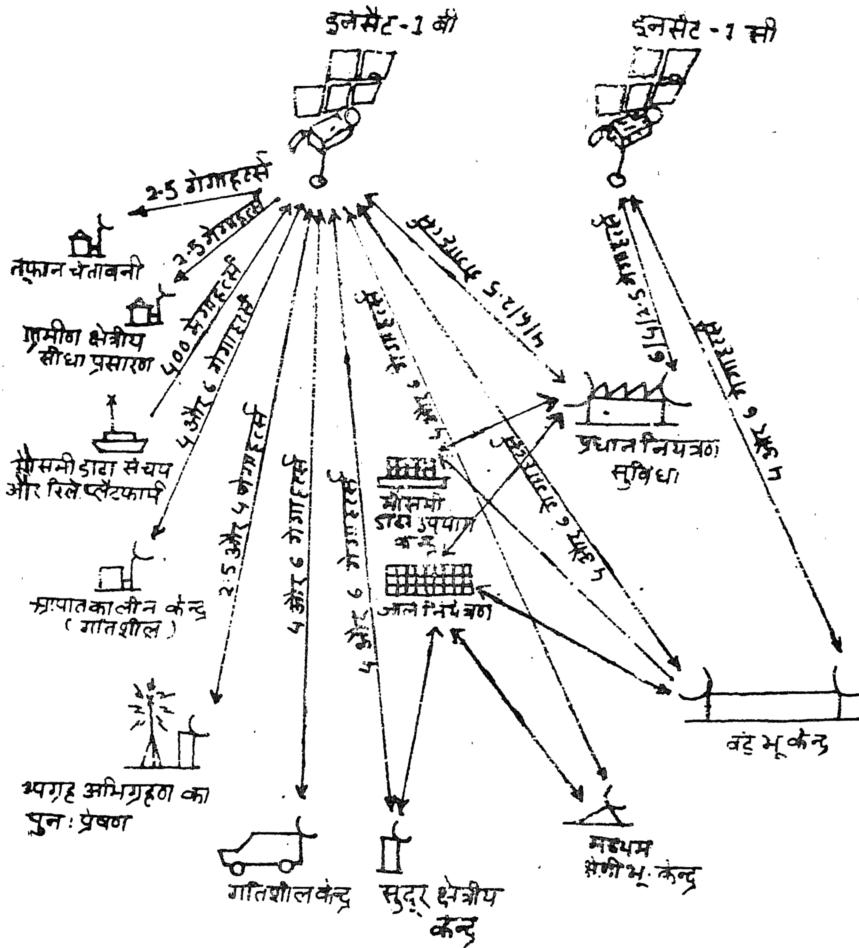
(ख) पृथ्वी का लगातार मौसमीय दृष्टि से प्रेक्षण एवं डाटा प्रेषण।

(ग) ग्रामीण क्षेत्रों में लगे लघु भू-केन्द्रों (Direct Reception Sytem DRS) के लिये टेलीविजन कार्यक्रम का सीधा प्रेषण। टेरेस्ट्रियल टेलीविजन प्रेषित्रों का जाल-कार्य।

(घ) रेडियो प्रेषित्रों का क्षेत्रीय एवं राष्ट्रीय जाल कार्य।

इनसैट-I परियोजना एक विलक्षण संचार परियोजना है। इस परियोजना का बहुउद्देश्यीय लक्ष्य केवल इस बात से ही नहीं जाना जाता कि इसमें बहुउद्देश्यीय उपग्रहों का प्रयोग हुआ है जिसमें विभिन्न संचार सेवायें जैसे निर्धारित उपग्रह सेवा (Fixed Satellite Service FSS), प्रसारण उपग्रह सेवा (Broadcasting Satellite Service BSS) और मौसमी उपग्रह सेवा (Meteorological Satellite Service MSS) एकसाथ शामिल हैं। इनसैट-I परियोजना भारतवर्ष के लिये विशेष रूप से बनाई गई है, जिससे कि इस देश की बढ़ती हुई संचार आवश्यकता की पूर्ति की जा सके।

इनसैट-I परियोजना भारतीय अन्तरिक्ष विभाग, संचार मंत्रालय के डाक एवं तार विभाग, नागरिक उड्डयन मंत्रालय के मौसम विभाग तथा सूचना एवं प्रसारण मंत्रालय के रेडियो एवं दूरदर्शन विभाग की संयुक्त परियोजना है। इनसैट-1परियोजना का पहला उपग्रह इनसैट-1 ए 10 अप्रैल 1982 को अमरीकी अन्तरिक्ष संस्था नासा के 3910 डेल्टा राकेट की मदद से अन्तरिक्ष में छोड़ा गया। अप्रत्याशित चन्द्र हस्तक्षेप के कारण पृथ्वी से सम्पर्क टूटने के फलस्वरूप उपग्रह में नोदक के समाप्त हो जाने के कारण इनसैट-1 ए उपग्रह बहुत अल्प समय तक ही कार्यशील रहा और 6 सितम्बर 1982 को इनसैट-1 ए उपग्रह को निष्क्रिय घोषित कर दिया गया। 15 अक्टूबर 1983 को इनसैट-1 परियोजना का दूसरा उपग्रह इनसैट-1 बी अन्तरिक्ष में छोड़ा गया जो सफलतापूर्वक कार्य कर रहा है। इनसैट-1 परियोजना के तृतीय उपग्रह इनसैट-1 सी पर पहली जून 1983 से कार्य प्रारम्भ हो गया है। यह उपग्रह भी इनसैट-1 ए एवं इनसैट-1 बी से मिलता-जुलता है तथा इसे 1986 के मध्य में अन्तरिक्ष में छोड़े जाने की आशा है। इनसैट-1 सी के प्रमोचन के बाद घरेलू संचार के लिये दो कार्यरत उपग्रहों का प्रस्ताव साकार हो जायेगा। इनसैट-1 परियोजना की रूप-रेखा चित्र 1 में स्पष्ट की गई है। इनसैट-1 परियोजना के बाद इनसैट-2 परियोजना प्रस्तावित है। इस श्रृंखला के उपग्रह 1988 के अन्त या 1989 के प्रारम्भ में प्रस्तावित हैं।



चित्र 1. इनसैट-I तंत्र संकल्पना

2. ऐतिहासिक भूमिका

1966 में उपग्रह टेलीविजन की जन संचार और शिक्षा के लिये उपयोगिता पहली बार भारत में डा० विक्रम साराभाई द्वारा अनुभव की गई। 1967 में पहली अन्तःसंस्था अध्ययन समिति की घोषणा 'इण्डियन नेशनल कमेटी फॉर स्पेस रिसर्च' के द्वारा की गई। 1972 के मध्य में अन्तरिक्ष आयोग के बनने तक भारत में अन्तरिक्ष कार्यक्रम को चलाने का उत्तरदायित्व परमाणु ऊर्जा विभाग पर रखा गया। 1968 में भारत सरकार के एक राष्ट्रीय उपग्रह संचार अध्ययन ग्रुप (National Satellite Communicatioп, NASCOM) का गठन किया। विभिन्न प्रकार के इन अध्ययनों एवं विचार-विमर्शों के आधार पर सरकार ने परमाणु ऊर्जा विभाग के प्रस्ताव उपग्रह शैक्षणिक दूरदर्शन परीक्षण (Satellite Instructional Television Expresion SITE) को मान्यता दी। इसके बाद

जून 1977 से जून 1979 के दौरान फ्रान्स-जर्मनी के सहयोग से निर्मित उपग्रह को प्रयोग करके उपग्रह दूर-संचार प्रयोग परियोजना (स्टेप) सम्पन्न की जिसके अन्तर्गत भारत में अनेक प्रकार के संचार प्रयोग किये गये । इसके बाद 19 जून 1981 को पहला भारतीय निर्मित उपग्रह "एप्पल" अन्तरिक्ष में छोड़ा गया तथा इसके अन्तर्गत भी अनेक प्रकार के संचार प्रयोग किये गये ।

1977 में इनसैट-1 परियोजना को भारत सरकार ने मंजूरी दी तथा उसके साथ ही इनसैट समन्वय कमेटी (INSAT Coordination Committee ICC) का भी गठन किया गया । अन्तरिक्ष खण्ड का उत्तरदायित्व अन्तरिक्ष विभाग को सौंपा गया तथा भू-खण्ड का उत्तरदायित्व भारतीय डाक एवं तार विभाग को सौंपा गया ।

3. इनसैट-1 तन्त्र

सम्पूर्ण इनसैट-1 तंत्र में निम्नलिखित खण्ड सम्मिलित हैं :

(क) अन्तरिक्ष खण्ड

इसमें एक प्रकार के दो उपग्रह, प्रमोचन बीमा और प्रधान नियंत्रण सुविधा (एम० सी० एफ०) सम्मिलित हैं । मई 1983 में भारत सरकार ने इनसैट-1 परियोजना के तृतीय उपग्रह इनसैट-1 सी को भी स्वीकृति दे दी है ।

(ख) दूर-सचार खण्ड

इसके अन्तर्गत 31 भू केन्द्रों (इनमें 28 अचल तथा 3 गतिशील) तथा स्विचिंग केन्द्रों के बीच अन्तःकनेक्सन शामिल हैं । ये भू-केन्द्र चित्र (2) में दिखाये गये हैं ।

(ग) मौसम सम्बन्धी भू-खण्ड

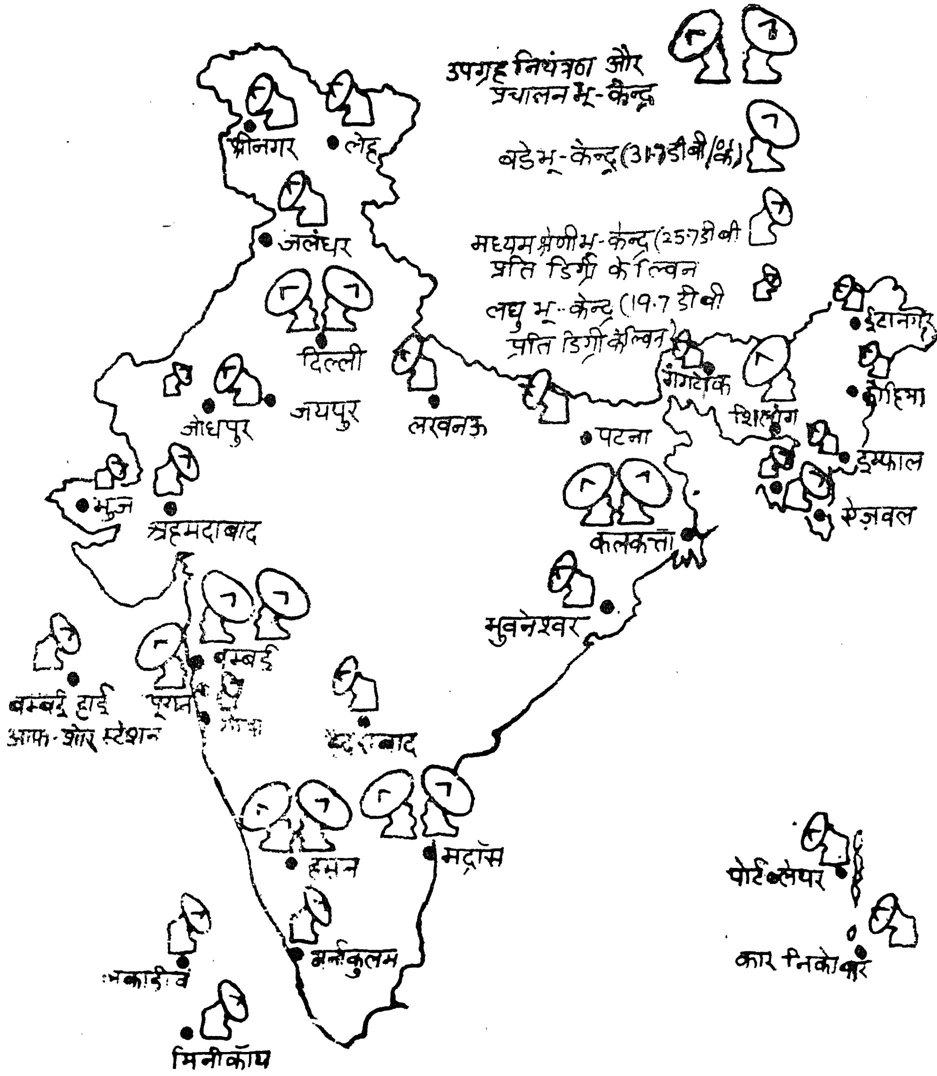
जिसमें मौसम-सम्बन्धी डाटा उपयोग केन्द्र (एम० डी० यू० सी०), 20 गौण डाटा उपयोग केन्द्र (एस० डी० यू० सी०), 100 स्थलीय तथा 10 समुद्रीय स्वचालित, बिना देख-भाल वाले डाटा संचय प्लेटफार्म (डी० सी० पी०) तथा प्रारम्भिक तूफान चेतावनी (डी० डब्ल्यू० एस०) सम्मिलित हैं ।

(घ) रेडियो जालकार्य भू-खण्ड :

इसमें दिल्ली, बम्बई, कलकत्ता और मद्रास भू-केन्द्रों के लिये रेडियो जाल-कार्य तथा सम्बन्धित रेडियो प्रेषित्रों का समाकलन सम्मिलित है ।

(च) निम्नलिखित टेलीविजन भू-खण्ड भी सम्मिलित हैं :

1. आन्ध्र-प्रदेश, बिहार, गुजरात, महाराष्ट्र, उड़ीसा और उत्तर प्रदेश के तीन-तीन जिलों के क्लस्टरों में लगाये गये सीधा अभिग्रहण सेटों (डी० आर० एस०) के लिये टेलीविजन प्रसरण सेवा। प्रत्येक प्रान्त के क्लस्टर के लिये अपलिंक ।



चित्र 2. इनसैट परियोजना का दूर संचार तंत्र

2. गोरखपुर, नागपुर, राजकोट और रांची में पुनः प्रसारण प्रेषित्रों की स्थापना।

3. दिल्ली और शिलांग से अपलिंक की सुविधा, टेलीविजन अपलिंकयुक्त गतिशील भू-केन्द्र का उपलब्ध कराया जाना, प्रत्येक दूरदर्शन केन्द्र के प्रांगण में "टेलीविजन केवल अभिग्रहण" केन्द्रों की स्थापना, जिससे राष्ट्रीय महत्व के कार्य क्रमों का प्रेषण किया जा सके।

4. पूना के फिल्म एवं टेलीविजन इंस्टीट्यूट और अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र, अहमदाबाद में टेलीविजन कार्यक्रमों के बनाने से संबंधित ट्रेनिंग का प्रबन्ध।

(च) टेलीविजन के विस्तार के लिये विशेष परियोजना जिसमें 13 उच्च पावर और 112 निम्न पावर टेलीविजन प्रेषित्र समिलित हैं। विशेष परियोजना के 125 टेलीविजन प्रेषित्रों के प्रांगणों में एस-बैन्ड "टेलीविजन केवल अभिग्रहण" 23 केन्दों के लगने की भी व्यवस्था है।

(ज) उपग्रह टेलीविजन सेवा का शिक्षा के लिये उपयोग।

इसके अरिरिक्त तेल और प्राकृतिक गैस आयोग ने दो दूर-संचार भू-केन्द्रों का निर्माण किया है, जिनमें से एक समुद्र के पास यूरान जगह में लगाया गया है तथा दूसरा समुद्र में एक प्लेटफार्म के ऊपर लगाया है।

4. इनसैट-1 अन्तरिक्ष खण्ड

इनसैट-1 अन्तरिक्ष खण्ड के अन्तर्गत दो उपग्रह अन्तरिक्ष में छोड़े गये। पहला उपग्रह 74° पूर्व देशान्तर पर छोड़ा गया जो केवल अल्पकाल तक ही सक्रिय रहा। दूसरा उपग्रह 30 अगस्त 1983 को छोड़ा गया। यह उपग्रह भी 74° पूर्व देशान्तर पर स्थापित किया गया। दूसरे इनसैट-1 बी को अमरीकी स्पेशल शटल की आठवीं उड़ान चैलेंजर के द्वारा छोड़ा गया। 15 अक्टूबर 1983 से यह राष्ट्रीय सेवा के लिये सौंप दिया गया। इनसैट-1 उपग्रह का विन्यास चित्र 3 में दिखाया गया है।

5. प्रधान नियन्त्रण सुविधा

इनसैट-1 उपग्रहों के नियन्त्रण के लिये कर्नाटक प्रान्त में हासन जिले में एक नियन्त्रण केन्द्र खोला गया है। इसमें 14 मीटर व्यास के पूर्णतया कर्णनीय (Steerable) दो एन्टेना हैं। नियन्त्रण केन्द्र को कार्यशील करने के लिये अबाध पावर सप्लाई का प्रयोग किया गया है। प्रधान नियन्त्रण सुविधा के लिये उपकरण देश के अन्दर बनाये गये हैं। प्रधान नियन्त्रण सुविधा केन्द्र के निम्नलिखित कार्य हैं :

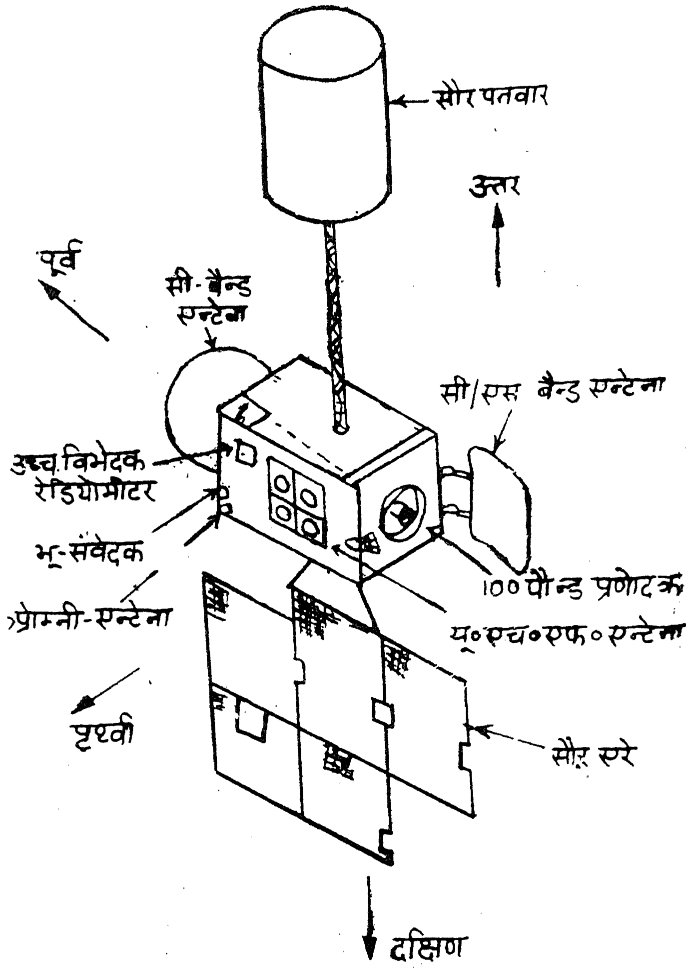
(क) इनसैट उपग्रहों का नियंत्रण जिसमें दूरमिति, परासन तथा जाँच-पड़ताल शामिल हैं।

(ख) उपग्रह से प्राप्त दूरमिति, परासन और जाँच-पड़ताल डाटा का कक्षीय विश्लेषण।

प्रधान नियंत्रण सुविधा इनसैट-1 उपग्रह तंत्र के प्रचालन का मुख्य केन्द्र-बिन्दु है। यह केन्द्र टेलीफोन और टेलीप्रिन्टर लाइनों के द्वारा दिल्ली में स्थित जाल प्रचालन नियंत्रण केन्द्र (एन० ओ० सी० सी०) तथा मौसमी डाटा प्रयोग केन्द्र (एम० डी० यू० सी०) से सीधा जुड़ा हुआ है। किसी भी प्रकार के आपातकालीन उपयोग के लिये उपग्रह का वास्तविक समय डाटा बंगलौर के इसरो उपग्रह केन्द्र तथा इनसैट-1 अन्तरिक्ष खण्ड परियोजना आफिस में उपलब्ध कराये गये हैं।

6. इनसैट-1 उपग्रह

इनसैट-1 उपग्रहों का तकनीकी संस्थान निम्नलिखित है :



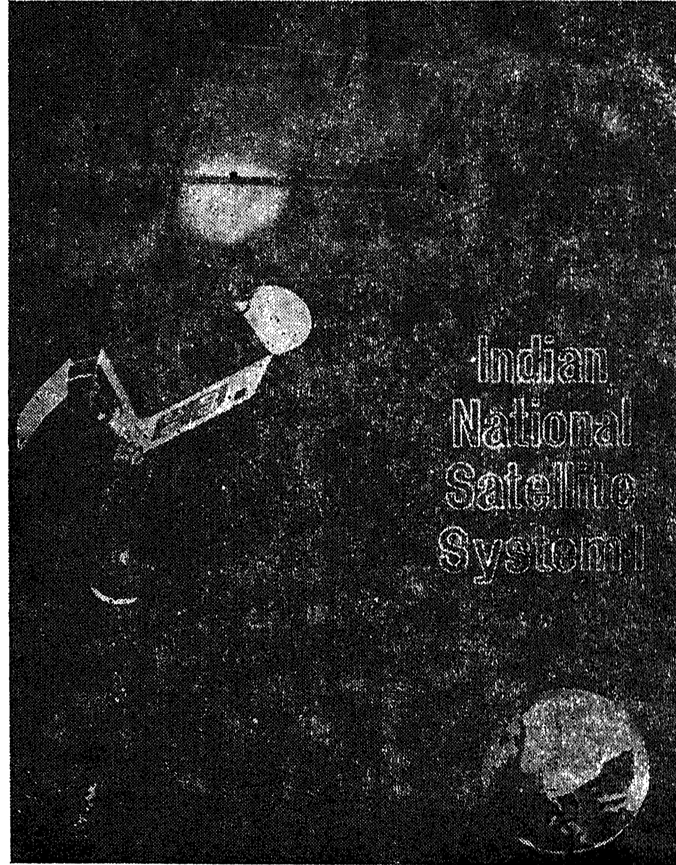
चित्र 3. इनसैट-Iबी उपग्रह का विन्यास

(क) 5935-6425 मेगाहर्त्स (पृथ्वी से उपग्रह की ओर) तथा 3710-4200 मेगाहर्त्स (उपग्रह से पृथ्वी की ओर) आवृत्ति में कार्य करने वाले 12 ट्रान्सपान्डर इनसैट उपग्रह में हैं। ट्रान्स-पान्डर वह उपकरण है जो एक स्तर की आवृत्ति को दूसरे स्तर की आवृत्ति में बदलता है। उपग्रह के सन्दर्भ में ट्रान्सपान्डर पृथ्वी से आने वाली सिगनल आवृत्ति को अभिग्रहित करके उसका प्रवर्द्धन तथा तरंग परिवर्तन करके उसे पुनः पृथ्वी की ओर वापस भेज देता है।

(ख) 5855-5935 मेगाहर्त्स (पृथ्वी से उपग्रह की ओर) आवृत्ति में कार्य करने वाले दो टेलीविजन ट्रान्सपान्डर भी इनसैट-1 उपग्रह में हैं। इनका प्रयोग टेलीविजन के लिये तथा रेडियो जाल-कार्य के लिये किया जा रहा है।

(ग) 0·55 माइक्रोमीटर से 0·75 माइक्रोमीटर के दृश्य स्पेक्ट्रम तथा 10·5 से 12·5 माइक्रोमीटर के इन्फ्रारेड स्पेक्ट्रम में कार्य करने वाला एक अत्यन्त उच्च विभेदक रेडियोमीटर भी इनसैट उपग्रह में लगा है, जो पृथ्वी के किसी भी 2·75 कि० मी० × 2·75 कि० मी० (दृष्टिगोचर स्पेक्ट्रम में) एवं 11 कि० मी० × 11 कि० मी० (इन्फ्रारेड स्पेक्ट्रम में) भू-खण्ड का सूक्ष्मता से मानचित्रण करने में सक्षम है।

(घ) 402·75 मेगाहर्त्स की पृथ्वी के उपग्रह के लिये एक लिंक भी है जिसका उपयोग मौसम सम्बन्धी उपयोगों के लिये किया जा रहा है।

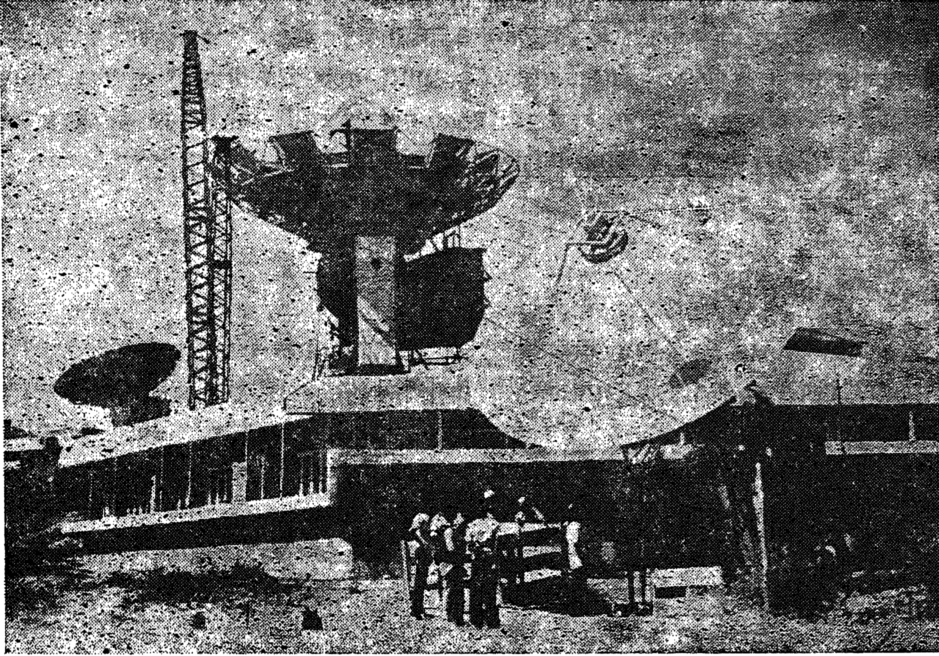


चित्र 4

6.1 उपग्रह संरचना

सूक्ष्म ऊँचाई नियंत्रण तंत्र तथा बायस्ड मोमेन्टम चक्र युक्त इनसैट-1 उपग्रह तीन अक्षीय भार सन्तुलित उपग्रह है। स्पष्ट दृष्टि फील्ड (Field of View) बनाये रखने के लिये इनसैट-1 उपग्रह में

असंमित सौर एरे लगाया गया है। भौतिक विन्यास दृष्टि से इनसैट-1 उपग्रह का ढाँचा एक बक्से से मिलता-जुलता है, जिसमें सौर पतवार, सौर एरे और सी-बैन्ड तथा सी/एस बैन्ड एन्टेना अलग से लगे हुये हैं।



चित्र 5

प्रमोचन के समय सौर एरे ट्रान्सफर कक्षा में आंशिक रूप से खोला जाता है, जब कि सौर पतवार केवल समकालिक कक्षा में ही खोली जाती है। अपोजी चालन (Apogee Manoeuvers) के समय उपग्रह तीनअक्षीय संतुलित रहता है। समकालिक कक्षा के आखिरी चरण में इनसैट-1 उपग्रह की लम्बाई सौर पतवार की नोक से सौर एरे के आखिरी छोर तक 19·4 मीटर हो जाती है। मुख्य ढाँचे की माप 1·55 मी० × 1·4 मी० × 2·18 मी० है। इनसैट-1 उपग्रह के सौर ऊर्जा जनन आँकड़े सारणी में दिये गये हैं।

सारणी 1

इनसैट-1 उपग्रह में जनित सौर ऊर्जा

सौर ऊर्जा की मात्रा (प्रारम्भ में)	1185 वाट
सौर ऊर्जा की मात्रा (आखिर में)	900 वाट
सौर ऊर्जा तंत्र का निर्धारित जीवन काल	7 साल
सौर एरे क्षेत्रफल	11·5 वर्ग मी०

इनसैट-1 उपग्रह में 2 परावर्तक हैं जिन्हें कक्षा में खोला जाता है। इनमें से एक 1·4 मी० व्यास का है जो उपग्रह की पूर्वी दिशा में है तथा जिसका प्रयोग 6000 मेगाहर्त्स के सिगनलों के अभिग्रहण तथा दूरसंचार के सभी ट्रांसपान्डर के सम संख्या चैनेलों से निकले 4000 मेगाहर्त्स के सिगनलों के प्रेषण तथा डाटा संचय प्लेटफार्म से निकले सिगनल के प्रेषण के लिये किया जाता है। दूसरे परावर्तक एन्टेना की माप 1·5 मी०×1·6 मी० है और यह उपग्रह की पश्चिम दिशा में स्थित है। दूरसंचार ट्रांसपान्डरों से निकले सभी विषम चैनेलों के 4000 मेगाहर्त्स के सिगनलों का प्रेषण, अत्यन्त उच्च विभेदक रेडियोमीटर का डाटा प्रेषण एवं 2500 मेगाहर्त्स टेलीविजन सिगनल का प्रेषण इस एन्टेना के द्वारा किया जाता है। 400 मेगाहर्त्स के डाटा संचय प्लैटफार्म के डाटा का अभिग्रहण यू० एच० एफ० एन्टेना के द्वारा किया जाता है।

6.2 उपग्रह का नोदन तंत्र

उपग्रह के नोदन तंत्र में पांच पौन्ड वाले 12 और 110 पौन्ड वाला एक द्विनोदक प्रणोदक शामिल हैं। इनमें इंधन के तौर पर मोनो-मेथिल हाइड्राजीन तथा आक्सीकरण के तौर पर नाइट्रोजन टेट्राआक्साइड का प्रयोग किया गया है। पांच पौन्ड वाले प्रणोदक अभिवृत्ति नियंत्रण तथा केन्द्र प्रस्थापन (Station Keeping) के लिये आवेग प्रदान करते हैं। 110 पौन्ड वाला प्रणोदक उपग्रह को अन्डाकार कक्षा से समकालिक वृत्तीय कक्षा में ले जाने के लिये प्रणोद पैदा करता है। पांच पौन्ड वाले प्रणोदकों का प्रज्वलन लगातार या रुक-रुक कर किया जा सकता है। उपग्रह में इंधन की मात्रा इतनी रखी जाती है जिससे उपग्रह 7 साल तक कार्य कर सके। अन्तरिक्ष में अपने जीवन-काल के दौरान उपग्रह अपनी वास्तविक स्थिति से थोड़ा बहुत इधर-उधर स्थानान्तरित हो जाता है। उपग्रह को उसकी वास्तविक स्थिति में रखने के लिये पाँच पौन्ड वाले प्रणोदकों की मदद से आवश्यक संशोधन प्रदान किया जाता है। इसमें उपग्रह में रखे ईंधन का इस्तेमाल किया जाता है। जितनी बार उपग्रह को इधर-उधर घुमाया जाता है उतनी ही बार इंधन का खर्चा होता है। इस प्रकार उपग्रह का जीवन काल इंधन पर निर्भर करता है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

भारतीय भाषाओं की अनुकूलता में ध्वनि परिचय-संख्या पद्धति

देवेन्द्र नाथ श्रीवास्तव

रिएक्टर नियंत्रण प्रभाग, भाभा परमाणु अनुसंधान केन्द्र, ट्राम्बे, बम्बई

[प्राप्त—जनवरी 1, 1986]

सारांश

भारतवासियों की अनेक सामाजिक, आर्थिक और सुरक्षात्मक समस्याओं के समाधान के लिये एक ऐसी नागरिक-संख्या व्यवस्था की नितांत आवश्यकता है जिसके अनुसार प्रत्येक नागरिक को दी गई किसी अनन्य और अपरिवर्तनीय संख्या का सभी प्रशासनिक और महत्वपूर्ण कार्यों के लिये आजीवन उपयोग होता रहे। परन्तु दशमलव पद्धति पर आधारित संख्यायें, जो कि डेनमार्क, नार्वे, स्वीडन आदि देशों में सफल सिद्ध हुई हैं, भारतवर्ष जैसे विशाल देश के लिये उपयुक्त नहीं हैं क्योंकि यहाँ के लिये किसी भी सम्भव सूत्र का आकार कम से कम 15 अंकों का होगा जो कि सर्वसाधारण के लिये अति कठिन होगा। इस समस्या के समाधान के लिये "ध्वनि संख्या पद्धति" का विकास किया गया है जिसमें बड़ी-बड़ी संख्याओं को छोटी सी ध्वनि में परिवर्तित कर लिया जाता है। इस प्रकार निर्मित ध्वनि-संख्यायें अशिक्षितों के लिये सरल होंगी तथा इन्हें देवनागरी या अन्य भारतीय लिपियों में लिखा जा सकता है। इस नई पद्धति की केवल छः अंकों की परिचय-संख्या छः हजार करोड़ जनता का एक-साथ लेखा-जोखा बिना त्रुटि के कर सकती है। इसका आयु अंक प्रत्येक 128 वर्ष बाद पुनश्चक्रित होता रहेगा जिससे यह 128 वर्ष तक की मानव आयु को असंदिग्ध रूप से सूचित कर सके और यह प्रणाली शाश्वत बनी रहे। इस प्रकार बड़ी संख्याओं को छोटा रूप देने की सामर्थ्य केवल भारतीय लिपियों में ही है, अंग्रेजी आदि यूरोपीय लिपियों में नहीं।

Abstract

Self checking all purpose phonetic identity number system for security and welfare. *By* D. N. Srivastava, Reactor control Division, Bhabha Atomic Research Center, Trombay, Bombay-85.

The multifarious social, economic, and security problems, which have been chronically ailing the Indian people, call for an all-purpose unique identity number for each citizen. This paper gives a review of person-number (PN) systems in vogue in 22 countries, and concludes that decimal PN formulas, which have been successful in some states, are impractical for a vast country like India because any worthwhile formula will have nearly 15 digits. The phonetic number system

converts long numbers into short intelligent sounds which are easily workable with illiterate masses and which can be written in any Indian script. In this system, the numerical order is same as the alphabetical order. Hence it is workable without even knowing its mathematics. The 6 digit phonetic identity number formula can account for 6000 crore population at a time. Its year code recycles after every 128 years covering upto 128 years of human age and making the system perpetual. Phonetic identity numbers are less prone to error and not easily amenable to forging because of their self-checking structure formulated with two schemes—the hidden mathematical relationship of the last digit with other digits, and the coding of physical feature which can be easily verified on the spot by even non-experts. Their immediate application may be in numbering civil identity cards to check infiltration. Because of their self-checking property, they can be used without photo-identity cards for the majority of the population, and they can be allotted at birth. Their laconic structure gives them the potentiality to serve as all-purpose number througout the life of a citizen correlating all perronal records, transactions of business, and important dealings. They will, therefore, be a helpful tool to implement welfare plans, check malpractices, reduce the generation of black money, and control anti-social activities.

भारतीय संस्कृति की चिरकाल से ही विशेषता रही है अनेकता में एकता। इस समय अपने देश में 16 संवैधानिक मान्य भाषायें तथा बहुत सी उपभाषायें और बोलियाँ प्रचलित हैं। इनकी लिपि, व्याकरण और शब्द-रचना में बहुत अन्तर होने पर भी इनमें एक महत्वपूर्ण समानता है और वह है स्वरों तथा व्यंजनों का क्रम। कहीं-कहीं कुछ वर्ण कम या अधिक होने पर भी उनका मूल क्रम एक ही है। भारतीय लिपियों की इस गूढ़ भाषा-वैज्ञानिक धरोहर का अभी तक उपयोग नहीं हो पाया है। इस लेखक का प्रस्तुत कार्य, इस अछूती निधि का भारतवासियों की अनेक सामाजिक, आर्थिक और सुरक्षात्मक समस्याओं के समाधान के लिये प्रथम प्रयास है।

नागरिक परिचय संख्या की आवश्यकता

इस वैज्ञानिक और तकनीकी युग में किसी समस्या के साधारण उल्लेख मात्र से उसका प्रयोगात्मक हल नहीं निकलता। केवल औसत आँकड़े प्रस्तुत करने से प्रत्येक व्यक्ति की जीवनोपयोगी आवश्यकताओं की पूर्ति का उपाय नहीं मिलता। इसके लिये चाहिये एक-एक व्यक्ति की वास्तविक स्थिति का लेखा-जोखा तथा तत्सम्बन्धित विशिष्ट उपाय। इसके अतिरिक्त विक्षुब्ध सामाजिक वातावरण में; बाढ़, भूकम्प, सूखा आदि का प्राकृतिक बिपदाओं में; व्यक्तिगत आपदाओं में तथा युद्धकाल में उत्पन्न होने वाले संकट का अविलम्ब सामना करने के लिये नागरिकों की त्वरित व्यक्तिगत पहचान की व्यवस्था अति आवश्यक है।

उपर्युक्त समस्याओं का एकसाथ समाधान हो सकता है यदि प्रत्येक नागरिक को एक अनन्य तथा अपरिवर्तनीय कोड (Code) दे दिया जाय, जिसका उपयोग आजीवन सभी महत्वपूर्ण कार्यों में

होता रहे। डेनमार्क, नार्वे, स्वीडन, इजराइल आदि देशों ने अपने प्रशासन को नागरिक परिचय-संख्या के आधार पर बहुत ही सक्षम और किफायती बना लिया है।[1]

दशमलव पद्धति की कठिनाई

डेनमार्क की परिचय-संख्या 10 दशमलव अंकों की है जिसमें बायीं ओर से क्रमशः दो अंक जन्म तिथि, दो अंक महीना, दो अंक वर्ष (शताब्दी छोड़कर) इंगित करते हैं। इसके पश्चात् 3 अंक क्रम संख्या के हैं। अन्तिम अंक जाँच-कोड है, जो कि पुरुषों के लिये विषम और स्त्रियाँ के लिये सम होता है। यह परिचय-संख्या केन्द्रीय जनसंख्या रजिस्टर द्वारा प्रत्येक नागरिक को जन्म पर दी जाती है। इस प्रकार की परिचय-संख्या तथा नौ सौ संगणकों के देशभर में फैले हुये जाल के आधार पर, डेनमार्क का प्रशासन अपने को विश्व में सर्वोत्तम होने का दावा करता है।[2]

नागरिक परिचय संख्या का उपर्युक्त सूत्र डेनमार्क जैसे छोटे देश के लिये ही उपयुक्त है, जिसकी आबादी 52 लाख तथा जन्म दर 180 प्रतिदिन है। परन्तु भारतवर्ष की जनसंख्या 75 करोड़, जन्मदर 70 हजार प्रतिदिन तथा मृत्युदर 30 हजार प्रतिदिन है। किसी केन्द्रीय व्यवस्था से इतने नागरिकों का लेखा-जोखा करना असम्भव तो नहीं परन्तु अति कठिन अवश्य है क्योंकि केन्द्रीय संस्थान पर व्यवस्था लागू होने के बहुत साल बाद केवल एक लाख प्रार्थना पत्र प्रतिदिन नागरिक-संख्याओं को प्राप्त करने तथा रद्द करने के लिये आयेंगे। प्रारम्भिक वर्षों में यह दर कई लाख प्रतिदिन होगी। शेष कार्यवाही आदि का बोझ इससे कई सौ गुना अधिक होगा।

बड़े देशों के विस्तार तथा अधिक जनसंख्या का हिसाब रखने के लिये नागरिक परिचय-संख्या में स्थान-कोड होना अति आवश्यक है, जिससे कि केन्द्रीय संस्थान द्वारा निर्धारित नीतियों के अनुसार क्षेत्रीय कार्यालय स्वतंत्र रूप से सारा काम कर सकें। इस समय भारतवर्ष में उपलब्ध क्षेत्रीय कोड है छः दशमलव अंकों का पिन कोड। एक पिन वितरण क्षेत्र में कई दर्जन ग्रामों का समावेश है। यदि इसे दो अंक और बढ़ाकर प्रत्येक ग्राम को 8 अंक से सूचित किया जाय, जन्म वर्ष को दो अंकों से, क्रम संख्या तीन अंकों से और दो अंक के जाँच-कोड डाले जायँ तो एक सम्भव सूत्र आकार 15 अंकों का होगा।

अब प्रश्न उठता है कि क्या इतने बड़े सूत्र का उपयोग जीवन के सभी क्षेत्रों में, अधिकांशतः अनपढ़ जनता के द्वारा शीघ्रता से किया जा सकता है, अथवा आवश्यकता पड़ने पर किसी को उसकी परिचय-संख्या से बुलाया जा सकता है? इस प्रश्न का उत्तर जापान के प्रायोगिक उदाहरण से मिलता है। जापान में 1970-72 के दौरान दो शहरों में 14 अंकों की नागरिक परिचय-संख्या का प्रारम्भ किया गया था। परन्तु अपने विशाल आकार के कारण वह असफल सिद्ध हुई।

अतः भारतवर्ष जैसे विशाल देश के लिये किसी नये प्रकार की परिचय-संख्या पद्धति का विकास आवश्यक है।

आदर्श परिचय-संख्या के गुण

सार्वोपयोगी तथा जनसाधारण के लिये सुलभ होने के लिये आदर्श परिचय-संख्या में निम्नलिखित गुण आवश्यक हैं :

1. इसके उच्चारण की ध्वनि संक्षिप्त, सरल, कोमल तथा मधुर होनी चाहिये, जिससे कि आवश्यकता पड़ने पर किसी व्यक्ति को उसके कोड से बुलाया जा सके।

2. इसका आकार छोटा होना चाहिये, अधिक से अधिक छः अकों का, जिससे उसे आसानी से याद किया जा सके तथा अनेक कार्यों में सुगमता से उपयोग हो सके।

3. इसमें आवश्यक जाँच-कोड भी होना चाहिये जिससे किसी त्रुटि का अविलम्ब पता चल सके।

4. इसका ताल-मेल संगणक के साथ बैठना चाहिये परन्तु यह संगणक पर पूर्ण-रूपेण निर्भर नहीं होना चाहिये, जिससे कि संगणक के अभाव में भी साधारण कार्यालय के ढंग से इसका उपयोग हो सके।

ध्वनि-संख्या पद्धति

ध्वनि संक्षेप के मापदंड के लिये हमें सर्वप्रथम ध्वनि की कोई व्यावहारिक इकाई निश्चित करनी चाहिये। यूरोपीय भाषा-वैज्ञानिकों के अनुसार ध्वनि की इकाई "फोनीम" तथा "सिलेबल" है। वाणी के विश्लेषण में स्पष्ट हो सकने वाली कम से कम ध्वनि को फोनीम कहते हैं।[3] सिलेबल शब्द के उस अंश को कहते हैं जिसका उच्चारण ध्वनि के एक प्रयास में होता है। ये इकाइयाँ भाषा के अध्ययन के लिये भले ही उपयुक्त हों परन्तु अशिक्षितों अथवा जन-साधारण के व्यवहार में ठीक नहीं हैं क्योंकि शुद्ध फोनीम और मिश्रित फोनीम का अन्तर एक सूक्ष्म सैद्धान्तिक विश्लेषण मात्र है तथा अशिक्षित व्यक्ति प्रायः एक सिलेबल को भी दो में बाँट देते हैं। पिंगल शास्त्र के अनुसार ध्वनि की इकाई है मात्रा जिसका आशय है उच्चारण की अवधि। इसी के आधार पर संस्कृत में लघु, दीर्घ और प्लुत स्वरों का विभाजन है। अशिक्षित व्यक्ति किसी स्वर का उच्चारण मानक उच्चारण से कम अथवा अधिक समय तक कर सकता है। अतः मात्रा भी परिचय-संख्या के लिये उपयुक्त नहीं है। इसके लिये हम ध्वनि की एक नई इकाई बनाते हैं—**"ध्वनि का वह कम से कम अंश जिसे कोई नौसिखिया जिह्वा के एक प्रयास में दुहराने का प्रयत्न करता है।"** इस परिभाषा के अनुसार भारतीय लिपियों का प्रत्येक स्वर तथा व्यंजन एक इकाई है। जब किसी व्यंजन की स्वर मात्राओं के प्रयोग से ध्वनि बदलती है तो परिवर्तित ध्वनि भी इकाई ही रहती है। उदाहरणार्थ अ, आ, इ, ई, क, ख, ग, का, कि, की, ... आदि एक इकाई के उच्चारण हैं। अतः किसी भी वाणी में कितनी ध्वनि इकाइयाँ हैं यह जानने के लिये सबसे सरल उपाय है उसे किसी भारतीय लिपि में लिखकर उनमें आने वाले व्यंजनों तथा स्वतन्त्र स्वरों की संख्या गिनना। ऐसा करने में जब कहीं मिश्रित व्यंजन आयें तो उनके प्रत्येक अंश को एक इकाई ही मानना होगा क्योंकि अशिक्षित लोगों को प्रायः मिश्रित व्यंजनों के उच्चारण में कठिनाई होती है तथा उसे वे अलग-अलग तोडकर बोलते हैं और इसी प्रकार बच्चा भी बोलना सीखता है।

ध्वनि की इस इकाई के मापदंड से हम देखते हैं कि औसत माप 1.8 है तथा अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की औसत माप 1.6 है। अतः ध्वनि संक्षेप के लिये यह अनिवार्य है कि परिचय-संख्या के अंक भारतीय भाषाओं के अक्षर हों।

अंकों की संख्या कम करने का एकमात्र उपाय है उनका आधार बढ़ाना। दशमलव पद्धति का आधार है 10, अतः अंकों का मूल्य 10 के घात के अनुसार बढ़ता है। यदि आधार अधिक हो तो अंकों को मूल्य वृद्धि बढ़े हुए आधार के घात के अनुसार होगी।

संगणकों के द्विमानीय तर्क को ध्यान में रखकर नई संख्या पद्धति का आधार 128 निश्चित किया गया है। इसके लिये आवश्यक 0 से 127 मान के अंकों के लिये आवश्यक संकेत 16 कोमल व्यंजन तथा 8 स्पष्ट स्वरों के संयोग से निर्मित किये गये हैं, जिन्हें सारणी 1 में क्रम-बद्ध किया गया है। इस प्रणाली के कुछ भाषा-वैज्ञानिक तथ्य निम्नलिखित हैं—[4]

1. अंकों की ध्वनियों को असंदिग्ध बनाने के लिये इ, ई; उ, ऊ; ए, ए 3; ओ ओ 3; श, ष, स के सूक्ष्म अन्तर पर ध्यान नहीं दिया गया है।

2. स्वरों की ध्वनियों को असंदिग्ध बनाने के लिये उनसे मिलते-जुलते व्यंजनों य, व को छोड़ दिया गया है।

3. अंकों की ध्वनि कोमल बनाने के लिये पूरा ट-वर्ग और च, छ के अतिरिक्त सभी महा-प्राण छोड़ दिये गये हैं।

4. ध्वनि-संख्या में स्वतन्त्र स्वर (अ, आ, ...) तथा स्वतन्त्र व्यंजन (क् ग् .....) नहीं लिये गये हैं। अतः किन्हीं भी दो स्वर मात्राओं के बीच में एक व्यंजन तथा किन्हीं भी दो व्यंजनों के बीच एक स्वर अवश्य रहता है। इससे और व्यंजन सन्धि, स्वर-सन्धि के कारण होने वाले परिवर्तनों का प्रश्न नहीं उठेगा।

5. विसर्ग का उपयोग नहीं किया गया है जिससे कि विसर्ग-सन्धि का प्रश्न न उठे।

6. स्वतन्त्र श्, ष्, स्, र, ऋ, ॠ का उपयोग न होने से षत्व-विधान और णत्व-विधान के कारण कोई परिवर्तन नहीं होगा।

7. ध्वनि को मधुर बनाने के लिये आवश्यक स्थानों पर अनुनासिक का प्रयोग किया जा सकता है।

इस नवीन पद्धति में संख्यायें सुनने में प्रायः अर्थहीन शब्दों जैसी लगती हैं जैसे कि अपरिचित रेलवे स्टेशनों के नाम, हालांकि यदा-कदा कोई सार्थक शब्द भी उनके क्रम में आ जाता है। आधार

Phonetic	Dec.	Phonetic	Dec.	Phonetic	Dec.	Phonetic	Dec.	Phonetic	Dec.	Phonetic	Dec.	Phonetic	Dec.	Phonetic	Dec.
क	0	च	16	ज	32	थ	48	न	64	ब	80	र	96	स	112.
का	1	चा	17	जा	33	था	49	ना	65	बा	81	रा	97	सा	113
कि , की	2	चि , ची	18	जि , जी	34	थि , थी	50	नि , नी	66	बि , बी	82	रि , री	98	सि , सी	114
कु , कू	3	चु , चू	19	जु , जू	35	थु , थू	51	नु , नू	67	बु , बू	83	रु , रू	99	सु , सू	115
के , के3	4	चे , चे3	20	जे , जे3	36	थे , थे3	52	ने , ने3	68	बे , बे3	84	रे , रे3	100	से , से3	116
कै	5	चै	21	जै	37	थै	53	नै	69	बै	85	रै	101	सै	117
को , को3	6	चो , चो3	22	जो , जो3	38	थो , थो3	54	नो , नो3	70	बो , बो3	86	रो , रो3	102	सो , सो3	118
कौ	7	चौ	23	जौ	39	थौ	55	नौ	71	बौ	87	रौ	103	सौ	119
ग	8	छ	24	त	40	द	56	प	72	म	88	ल	104	ह	120
गा	9	छा	25	ता	41	दा	57	पा	73	मा	89	ला	105	हा	121
गि , गी	10	छि , छी	26	ति , ती	42	दि , दी	58	पि , पी	74	मि , मी	90	लि , ली	106	हि , ही	122
गु , गू	11	छु , छू	27	तु , तू	43	दु , दू	59	पु , पू	75	मु , मू	91	लु , लू	107	हु , हू	123
गे , गे3	12	छे , छे3	28	ते , ते3	44	दे , दे3	60	पे , पे3	76	मे , मे3	92	ले , ले3	108	हे , हे3	124
गै	13	छै	29	तै	45	दै	61	पै	77	मै	93	लै	109	है	125
गो , गो3	14	छो , छो3	30	तो , तो3	46	दो , दो3	62	पो , पो3	78	मो , मो3	94	लो , लो3	110	हो , हो3	126
गौ	15	छौ	31	तौ	47	दौ	63	पौ	79	मौ	95	लौ	111	हौ	127

सारणी 1

128 होने के कारण इनका दशमलव मान बहुत अधिक होता है। उदाहरण के लिये छः अंकों की ध्वनि-संख्या "हौसूल राबेन" का दशमल मान है—

$$\text{हौसूल रावेन} = (127 \times 128^5) + (115 \times 128^4) + (104 \times 128^3) + (97 \times 128^2) + (84 \times 128) + (64) = 4, 394, 776, 554, 048$$

ध्वनि-संख्याओं की कुछ अन्य विशेषतायें निम्नलिखित हैं—

1. इस पद्धति में बड़ी-बड़ी संख्यायें छोटे अंक और न्यूनतम ध्वनि का रूप ले लेती हैं। एक से लेकर छः अंक तक की ध्वनि-संख्याओं का अधिकतम दशमलव मान सारणी 2 में दिया में गया है।

सारणी 2

एक से छः अंक तक कि ध्वनि-संख्याओं का अधिकतम दशमलव मान

ध्वनि-संख्या के कुल अंक	अधिकतम दशमलण मान			
	करोड़	लाख	हजार	
एक अंक	—	—	—	127
दो अंक	—	—	16	383
तीन अंक	—	20	97	151
चार अंक	26	84	35	455
पाँच अंक	3,435	97	38	367
छः अंक	4,39,804	65	11	103

2. इनमें एक ही अंक से एकसाथ दो स्वतन्त्र सचल राशियों को इंगित किया जा सकता है, जिनमें एक (अधिकतम 16 मान वाले) को व्यंजन से तथा दूसरे (अधिकतम 8 मान वाले) को उसके आधारभूत स्वर से।

3. चूँकि इनका आधार $128=2^7$ है, अतः द्विमानीय 7 सूचनाएँ एकसाथ केवल एक अंक से दी जा सकती हैं।

4. ध्वनि-संख्याओं को पंजाबी, गुजराती, बंगला, आसामी, मनीपुरी, उड़िया, तेलगू, कन्नड़ तथा मलयालम लिपि में देवनगरी की भाँति ही सुगमता से लिखा जा सकता है। तामिल में कुछ

व्यंजनों के लिये विशेष सांकेतिक चिन्ह् का उपयोग करना होगा जैसा कि संस्कृत के श्लोकों का तामिल में स्पष्ट उच्चारण दर्शाने के लिये कहीं-कहीं किया जा सकता है ।

5. ध्वनि-संख्या पद्धति में संख्या-क्रम और वर्णक्रम सभी भारतीय लिपियों में एक ही हैं। अतः संगणक द्वारा ध्वनि के गणितीय मान के क्रम पर बनाया हुआ विन्यास वही होगा जोकि किसी भारतीय लिपि में वर्णमाला के अक्षरों के क्रम के अनुसार बनेगा । इस सुविधा से यहाँ तक कि केवल प्राथमिक स्तर पर किसी भी प्रादेशिक भाषा में शिक्षा प्राप्त किया हुआ व्यक्ति, ध्वनि-संख्या के गणित को बिना जाने ही, सारा काम शुद्धता से अपनी मातृ-भाषा में कर सकता है ।

ध्वनि संख्या-परिचय

ध्वनि-संख्याओं की संक्षेप में सूचना वाहन करने की अगाध क्षमता के कारण इनका सबसे महपूत्वर्ण उपयोग है देश के प्रत्येक नागरिक को अनन्य परिचय-संख्या प्रदान करना । इस लेखक ने पाँच अंकों की ध्वनि परिचय-संख्या के एक सूत्र का प्रस्ताव फरवरी 1985 में रखा था ।[5] तत्पश्चात्, मानव शरीर के अपरिवर्तनीय चिन्ह्रों के आधार पर छः अंकों की जाँच-कोड सहित दो सूत्रों की रचना 1985 के अन्त में प्रकाशित की गई ।[6] बाद की रिपोर्ट में और भी कई सम्भव सूत्रों का संकेत किया गया है । उन्हीं में से स्थायी-निवास और जन्म-वर्ष पर आधारित एक सरल सूत्र का वर्णन यहाँ किया जा रहा है । सारणी 2 के अनुसार तीन अंकों की ध्वनि-संख्या से लगभग 2 लाख कोड तैयार होते हैं । भारतवर्ष में लगभग 6 लाख ग्राम हैं । अतः प्रत्येक ग्राम तथा शहरों की प्रत्येक कालोनी को तीन अंकों की ध्वनि-संख्या से इंगित किया जा सकता है । इसके लिये पूरे देश का, आवास और जन-संख्या के अनुसार तीन स्तरीय अंकन व्यवस्था वाँछित है । प्रथम अंक से प्रदेश और 4-5 जिलों के समूह जैसे दीर्घ-क्षेत्र का संकेत होगा; द्वितीय अंक से तहसील, तालुका, शहर अथवा परगने जैसे मध्यम-क्षेत्र का; तीसरे से ग्राम अथवा कालोनी जैसे लघु-क्षेत्र का । छः अंकों की ध्वनि परिचय-संख्या के (बायें से) प्रथम तीन अंक इस प्रकार व्यक्ति के स्थायी निवास का संकेत करेंगे (चित्र 1) । चौथे अंक से जन्म-वर्ष का संकेत सारणी 3 के अनुसार होगा । किसी भी ग्राम विशेष (प्रथम तीन अंक) तथा वर्ष विशेष (चतुर्थ-अंक) में पैदा हुये सभी नागरिकों का भेद एक क्रमसंख्या से किया जायगा, जिसे पाँचवें अंक तथा छठे अंक के स्वर से इंगित किया जायेगा । पुरुषों के लिये अन्तिम स्वर (उ, ऊ), (ए, ए 3), (ओ, ओ 3) होंगे तथा स्त्रियों के लिये आ, (इ, ई), ऐ, औ होंगे । छठा व्यंजन जाँच-कोड से होगा जिसका गणितीय सम्बन्ध शेष पांच व्यजनों और छः स्वरों से होगा । इस जांच-कोड से परिचय संख्या संगणक अथवा जाँच मशीन में डालते ही शुद्ध-अशुद्ध का पता चल जायगा ।

इस प्रकार की नागरिक परिचय-संख्या प्रत्येक ग्राम में प्रति वर्ष 1024 जन्म अंकन कर सकती है, जो कि वर्तमान जन्म दर, लगभग 33 प्रति वर्ष प्रति हजार, के अनुपात से एक ग्राम अथवा कालोनी की 30 हजार जनसंख्या के लिये पर्याप्त है । चूँकि यह प्रणाली प्रथम तीन अंकों से लगभग 2। लाख ग्रामों का कोड तैयार करती है, अतः यह लगभग 6000 करोड़ जनता का एकसाथ लेखा-जोखा कर सकती है । इसका चौथे अंक पर जन्म-वर्ष कोड प्रत्येक 128 वर्ष बाद पुनश्चक्रित होता रहेगा,

सारिणी - 3 : ध्वनि परिचय-संख्या का जन्म-वर्ष कोड

1872 क	1898 छी	1924 थे	1950 पो	1976 ल
1873 का	1899 छू	1925 थै	1951 पौ	1977 ला
1874 की	1900 छे	1926 थो	1952 ब	1978 ली
1875 कू	1901 छै	1927 थौ	1953 बा	1979 लू
1876 के	1902 छो	1928 द	1954 बी	1980 ले
1877 कै	1903 छौ	1929 दा	1955 बू	1981 लै
1878 को	1904 ज	1930 दी	1956 बे	1982 लो
1879 कौ	1905 जा	1931 दू	1957 बै	1983 लौ
1880 ग	1906 जी	1932 दे	1958 बो	1984 स
1881 गा	1907 जू	1933 दै	1959 बौ	1985 सा
1882 गी	1908 जे	1934 दो	1960 म	1986 सी
1883 गू	1909 जै	1935 दौ	1961 मा	1987 सू
1884 गे	1910 जो	1936 न	1962 मी	1988 से
1885 गै	1911 जौ	1937 ना	1963 मू	1989 सै
1886 गो	1912 त	1938 नी	1964 मे	1990 सो
1887 गौ	1913 ता	1939 नू	1965 मै	1991 सौ
1888 च	1914 ती	1940 ने	1966 मो	1992 ह
1889 चा	1915 तू	1941 नै	1967 मौ	1993 हा
1890 ची	1916 ते	1942 नो	1968 र	1994 ही
1891 चू	1917 तै	1943 नौ	1969 रा	1995 हू
1892 चे	1918 तो	1944 प	1970 री	1996 हे
1893 चै	1919 तौ	1945 पा	1971 रू	1997 है
1894 चो	1920 थ	1946 पी	1972 रे	1998 हो
1895 चौ	1921 था	1947 पू	1973 रै	1999 हौ
1896 छ	1922 थी	1948 पे	1974 रो	2000 क
1897 छा	1923 थू	1949 पै	1975 रौ	क्रमशः:

प्रथम अंक
द्वितीय अंक
तृतीय अंक
चतुर्थ अंक
पंचम अंक
षष्ठ अंक
स्थायी निवास
20, 97, 152 संयोग
दीर्घ क्षेत्र
मध्यम क्षेत्र
लघु क्षेत्र
रिक्त स्थान
जन्म-वर्ष
क्रम-संख्या
1,024 संयोग
आकार— 5-6 जिला
आकार— तालुका, परगना, शहर
आकार— ग्राम, कालोनी
आयु संकेत— 128 वर्ष (असंदिग्ध)
जनसंख्या— 30,000
अंतिम स्वर— स्त्री/पुरुष संकेत
अंतिम व्यंजन— जाँच-कोड

चित्र 1

जिससे 128 वर्ष तक की मानव आयु का असंदिग्ध रूप से निरूपण हो सके तथा यह प्रणाली शाश्वत बनी रहे।

परिचय-संख्या का सभी क्षेत्रों में उपयोग

चूँकि प्रत्येक व्यक्ति की छः अंकों की परिचय संख्या अनन्य और अपरिवर्तनीय होगी तथा जीवन में प्रयुक्त होने वाली अधिकांश संख्यायें 4 से 8 अंकों की होती हैं, अतः उन सभी के स्थान पर सुगमतापूर्वक ध्वनि परिचय-संख्या का ही उपयोग किया जा सकता है। इस व्यवस्था के अनुसार जन्म-प्रमाण पत्र संख्या, राशन कार्ड संख्या, बैंक खाता संख्या, आयकर खाता संख्या आदि सभी संख्यायें वही होंगी जो कि व्यक्ति की परिचय-संख्या है।

इस प्रकार प्रशासनिक, आर्थिक तथा सामाजिक व्यवहार में प्रयुक्त सभी संख्याओं के एकीकरण से बहुत से बिखरे हुये हिसाब एक फाइल में एकत्र होने लगेंगे जिनसे प्रशासन अधिक सक्षम और तीव्र हो सकेगा। अनेक अनियमितताओं, काले धन का सृजन, असामाजिक तत्वों की निगरानी, विदेशी जासूसों तथा घुसपैठियों पर नियन्त्रण आदि समस्याओं का सहज समाधान निकल सकेगा। इसके अतिरिक्त शुद्ध आँकड़ें मिल सकेंगे जिनसे विकास योजनाओं को सुचारु रूप से कार्यान्वित किया जा सके।

निष्कर्ष

इस प्रकार हम देखते हैं कि आदर्श नागरिक परिचय-संख्या के लगभग सभी गुण प्रस्तुत ध्वनि परिचय-संख्या में हैं। इस प्रकार की ध्वनि-संख्याओं की रचना अंग्रेजी आदि यूरोपीय तथा अरबी लिपि में नहीं की जा सकती, क्योंकि उनमें स्वरों तथा व्यंजनों की संख्या कम है और वर्णमाला में वे मिलाकर प्रस्तुत किये जाते हैं, अलग-अलग नहीं। इसके अतिरिक्त जब व्यंजन की ध्वनि स्वर के संयोग से परिवर्तित होती है तो एक नयी ध्वनि के लिये कम से कम दो अक्षरों की आवश्यकता पड़ती है जिससे 6 अंकों का सूत्र 12 अंकों का हो जायेगा। परन्तु इन्हें सभी भारतीय लिपियों में सुगमता से लिखा जा सकता है। भारतीय भाषाओं की विविधता के मध्य उनके ध्वनि क्रम की सूक्ष्म एकता, इस देश के सामाजिक जीवन को एक नये आयाम देने की क्षमता रखती है।

निर्देश

1. "The Person-Number Systems of Sweden, Norway, Denmark and Israel", Publication No. (PHS) 60-1358, U. S. Department of Health and Human Services, Hyattasville, Md., June, 1980.

2. "A Short Introduction to the Civil Registration System in Denmark", T/S Datacentralen 1956, Compenhagen, Denmark.

3. ब्लूमफील्ड, आर०, "Language", George Allen and Unwin Ltd. London, 1961.

4. श्रीवास्तव, डी० एन०, "The Development of Phonetic Numbers from the Sequence of Indian Languages", paper presented at the Fourteenth All India Conference Linguists, at Nagpur, July 5-6, 1985.

5. वही, "A Computerised Phonetic Number System for the Internal Security of the Nation", Report BARC-1251, 1985.

6. वही, "Self-Checking All-purpose ·Phonetic Identity Number System for Security and Welfare", Report BARC-1285·

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 1, 1986

N-समाकल समीकरणों का एकीकृत औपचारिक हल

जी० पी० गौतम, एस० असगर अली तथा ए० एन० गोयल

गणित विभाग, राजस्थान यूनिवर्सिटी, जयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 18, 1983]

सारांश

इस शोधपत्र में हमने सर्वाधिक व्यापक n-चरों वाले A-फलनों को अष्टि के रूप में अन्तर्ग्रस्त करने वाले N-समाकल समीकरणों के औपचारिक हल प्रस्तुत किये हैं।

Abstract

A unified formal solution of *N*-integral equations. *By* G. P. Gautam, S. Asghar Ali and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In the present paper we have given the formal solution of N-integral equations having the most general A-functions of n-variables as kernels.

1. विषय प्रवेश

मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकलों को, जबकि समाकल्य में आने वाले गामा फलनों में समाकलन के चरों के गुणांक सम्मिश्र राशियाँ हों, अर्थ देने के निमित्त गौतम तथा गोयल[1,2,3] ने दो अबीजीय 'A-फलन' तथा 'n चरों वाले A-फलन को प्रस्तुत किया तथा उसका अध्ययन किया। उपर्युक्त शोधपत्रों में लेखकों ने इन फलनों की विश्लेष्यता, श्रेणी निरूपण तथा (सममित एवं असममित) फूरिये अष्टियों की विवेचना की। प्रस्तुत शोधपत्र में हमने n चरों वाले A-फलनों को अष्टि के रूप में अन्तर्ग्रस्त करने वाले N-समाकल समीकरणों के औपचारिक हल प्राप्त किये हैं।

n चरों वाले A-फलन निम्नलिखित की भाँति परभाषित किया जाता है

$$A^{m,\,n';\,((m_n,\,n_n))}_{p,\,q;\,((p_n,\,q_n))}\left[\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\left|\begin{matrix} [((a_p;\ a'_p,\ \ldots,\ a^{(n)}_p));\ ((b_q;\ \beta'_q,\ \ldots,\ \beta^{(n)}_q))] \\ [[((c^{(n)}_{p_n},\ \gamma^{(n)}_{p_n}));\ ((d^{(n)}_{q_n},\ \delta^{(n)}_{q_n}))]] \end{matrix}\right.\right]$$

$$=A\,(x_1,\,\dots,\,x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi\,i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\phi\,(s_1,\,\dots,\,s_n)\prod_{k=1}^{n}[\,\phi_k\,(s_k)\,x_k^{-s_k}\,ds_k] \tag{1.1}$$

जबकि

(a) $$\phi\,(s_1,\,\dots,\,s_n)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\,(a_j-\sum_{k=1}^{n}\alpha_j^{(k)}\,s_k)\prod_{j=1}^{n'}\Gamma\,(1-b_j+\sum_{k=1}^{n}\beta_j^{(k)}\,s_k)}{\prod_{j=m+1}^{p}\Gamma\,(1-a_j+\sum_{k=1}^{n}\alpha_j^{(k)}\,s_k)\prod_{j=n'+1}^{q}\Gamma\,(b_j-\sum_{k=1}^{n}\beta_j^{(k)}\,s_k)} \tag{1.2}$$

$$\phi_k\,(s_k)=\frac{\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma\,(c_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)}\,s_k)\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma\,(1-d_j^{(k)}+\delta_j^{(k)}\,s_k)}{\prod_{j=m_k+1}^{p_k}\Gamma\,(1-c_j^{(k)}+\gamma_j^{(k)}\,s_k)\prod_{j=n_k+1}^{q_k}\Gamma\,(d_j^{(k)}-\delta_j^{(k)}\,s_k)} \tag{1.3}$$

तथा रिक्त गुणनफल अर्थात् $\prod_{1}^{m}$ $m<j$ के साथ को इकाई माना जाता है ।

(b) $m', n', p, q, m_k, n_k, p_k$, (प्रत्येक q_k $k=1, \dots, n$ के लिये) इस प्रकार के अऋणात्मक पूर्णांक है कि $m\leqslant p$, $n'\leqslant q$, $m_k\leqslant p_k$, $n_k\leqslant q_k$,

(c) प्रत्येक $k=1, \dots, n$: x_k $(\neq 0)$ तथा सभी प्राचल

$$a_j,\ \alpha_j^{(k)},\ b_j,\ \beta_j^{(k)},\ c_j^{(k)},\ \gamma_j^{(k)},\ d_j^{(k)},\ \delta_j^{(k)}$$

संमिश्र हैं,

(d) दुहरे कोष्टक संकेतों (( )) तथा [[ ]] का अर्थ निम्नलिखित है

(i) $((a_p;\ \alpha_p',\ \dots,\ \alpha_p^{(n)}))=(a_1;\alpha_1^{(n)});\ \dots;\ (a_p;\ \alpha_p',\ \dots,\ \alpha_p^{(n)})$;

(ii) $[[((c_{p_n}^{(n)},\gamma_{p_n}^{(n)}));\ ((d_{q_n}^{(n)},\delta_{q_n}^{(n)}))]]$ निनम्लिखित n समुच्चयों

$$[[((c_{p_1}',\gamma_{p_1}'));\ ((d_{q_1}',\delta_{q_1}'));\ \dots;\ [[((c_{p_n}^{(n)},\gamma_{p_n}^{(n)}));\ ((d_{q_n}^{(n)},\delta_{q_n}^{(n)}))]]$$

को प्रदर्शित करता है ।

(e) $i=\sqrt{-1}$ तथा कंटूर L_k पाशवाले s_k-तल में काल्पनिक अक्ष के समान्तर सरल रेखायें हैं आवश्यकतानुसार सुनिश्चित करने के लिये ताकि (1.2), (1.3) के हर में $-s_k$ वाले गामा के अनन्तक इससे दाहिनी ओर तथा $+s_k$ वाले गामा के अनन्तक इसके बायीं ओर पड़ें।

(1.1) के समाकल्य में गामा फलनों के उपगामी प्रसार का उपयोग दर्शाता है कि n-समाकल निरपेक्षत: अभिसारी हैं यदि निम्नांकित में कम से कम एक प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता हो

$$\text{(i)}\quad \xi_k=0,\ \eta_k>0,\ |\arg(\zeta_k x_k)|<\frac{\pi}{2}\eta_k \tag{1.4}$$

$$\text{(ii)}\quad \xi'_k=\xi''_k=\eta_k=0,\ x_k>0,\ \nu_k-\sigma_k \nu_k-\sum_{r=1}^{n}\sigma_r u_r<-1 \tag{1.5}$$

जबकि

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{m}R(\alpha_j^{(k)})-\sum_{j=m+1}^{p}R(\alpha_j^{(k)})+\sum_{j=1}^{n'}R(\beta_j^{(k)})-\sum_{j=n'+1}^{q}R(\beta_j^{(k)})$$

$$+\sum_{j=1}^{m_k}R(\gamma_j^{(k)})-\sum_{j=m_k+1}^{p_k}R(\gamma_j^{(k)})+\sum_{j=1}^{n}R(\delta_j^{(k)})-\sum_{j=n_k+1}^{q_k}R(\delta_j^{(k)}) \tag{1.6}$$

$$\zeta_k=\prod_{j=1}^{p}\alpha_j^{(k)\,\alpha_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{(k)\,-\beta_j^{(k)}}\sum_{j=1}^{p_k}\gamma_j^{(k)\,\gamma_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{q_k}\delta_j^{(k)\,-\delta_j^{(k)}},$$

$$\xi_k=\xi'_k+\xi''_k,\ \xi'_k=\sum_{j=1}^{p}I(\alpha_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q}I(\beta_j^{(k)}),$$

$$\xi''_k=\sum_{j=1}^{p_k}I(\gamma_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q_k}I(\delta_j^{(k)}),\ u_k=\sum_{j=1}^{p}R(\alpha_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q}R(\beta_j^{(k)}),$$

$$\nu_k=\sum_{j=1}^{p_k}R(\gamma_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q_k}R(\delta_k^{(k)}),$$

$$\nu_k=\sum_{j=1}^{p}R(a_j)-\sum_{j=1}^{q}R(b_j)+\sum_{j=1}^{p_k}R(c_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q_k}R(d_j^{(k)})$$

$$-\frac{1}{2}(p-q+p_k-q_k),$$

तथा $s_k=\sigma_k+it_k$, कंटूर L_k पर जब $|t_k|\to\infty$.

(1.6) के η_k के निम्नलिखित द्वारा प्रतिस्थापित करने पर भी प्रतिबन्ध (1.4) तथा (1.5) सन्तुष्ट होते हैं।

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{p} R(\alpha_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q} R(\beta_j^{(k)})+\sum_{j=1}^{p_k} R(\gamma_j^{(k)})-\sum_{j=1}^{q_k} R(\delta_j^{(k)})$$

$$-2\sum_{j=m+1}^{p}|R(\alpha_j^{(k)})|+2\sum_{j=1}^{n'}|R(\beta_j^{(k)})|-2\sum_{j=m_k+1}^{p_k}|R(\gamma_j^{(k)})|$$

$$+2\sum_{j=1}^{n_k}|R(\delta_j^{(k)})|.$$

I-फलन एक चर वाला है तथा निम्नांकित द्वारा दिया जाता है

$$A_{p,\,q}^{m,\,n}\left[x\,\middle|\begin{matrix}((a_p,\,\alpha_p))\\((b_q,\,\beta_q))\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_1^m \Gamma(a_j-\alpha_j s)\prod_1^n \Gamma(1-b_j+\beta_j s)}{\prod_{m+1}^p \Gamma(1-a_j+\alpha_j s)\prod_{n+1}^q \Gamma(b_j-\beta_j s)}\,x^{-s}\,ds \qquad (1.7)$$

निम्नलिखित दशाओं में कम से कम एक में (1.7) के दक्षिण पक्ष वाला समाकल निरपेक्षतः अभिसारी होता है

(i) $\xi=0,\ \eta>0.\ |\arg(\zeta x)|<\frac{\pi}{2}\eta$ (1.8)

(ii) $\xi=0=\eta,\ \nu-\sigma\lambda-<-1,\ x=0$ (1.9)

जबकि

$$\xi=\sum_1^p I(\alpha_j)-\sum_1^q I(\beta_j),\ \zeta=\prod_1^p \alpha_j^{\alpha_j}\prod_1^q \beta_j^{-\beta_j},$$

$$\eta=\begin{cases}\sum_1^m R(\alpha_j)-\sum_{m+1}^p R(\alpha_j)+\sum_1^n R(\beta_j)-\sum_{n+1}^q R(\beta_j),\\ \text{या}\\ \sum_1^p R(\alpha_j)-\sum_1^q R(\beta_j)-2\sum_{m+1}^p|R(\alpha_j)|+2\sum_1^n|R(\beta_j)|,\end{cases}$$

$$\nu = \sum_1^p R(a_j) - \sum_1^q R(b_j) - \tfrac{1}{2}(p-q); \ \lambda = \sum_1^p R(\alpha_j) - \sum_1^q R(\beta_j),$$

तथा $s=\sigma+it$, पथ L पर जबकि $|t| \to \infty$.

यदि (1.1) में हम निम्नलिखित लें

(i) $n'=0$ और $n_k=1=d_1^{(k)}$ $(\forall k=2, \ldots, n)$, अर्थात्

$$\phi(s_1, \ldots, s_n) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(a_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k\right)}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma\left(1 - a_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^{(k)} s_k\right) \prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(b_j - \sum_{k=1}^{n} \beta_j^{(k)} s_k\right)}$$

तथा

$$\phi_k(s_k) = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma\left(c_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)} s_k\right) \Gamma\left(\delta_j^{(k)} s_k\right)}{\prod_{j=m_k+1}^{p_k} \Gamma\left(1 - c_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} s_k\right) \prod_{j=2}^{q_k} \Gamma\left(d_j^{(k)} - \delta_1^{(k)} s_k\right)}$$

(ii) $\delta_1^{(k)}$ $(\forall k=2, \ldots, n)$ वास्तविक तथा धनात्मक हो तो n चरों वाले A-फलन एक A-फलन में समानीत किया जाता है

$$\lim_{x_2, \ldots, x_n \to 0} (A x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma\left(c_j^{(k)}\right)}{\prod_{j=m_k+1}^{p_k} \Gamma\left(1 - c_j^{(k)}\right) \prod_{j=2}^{q_k} \Gamma\left(d_j^{(k)}\right) \delta_j^{(k)}} \right)$$

$$A^{m+m_1,\, 0+n_1}_{p+q_1,\, p+q_1} \left[x_1 \left| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p')), ((c_{p_1}', \gamma_{p_1}')) \\ ((b_q, \beta_q')), ((d_{q_1}', \delta_{q_1}')) \end{matrix} \right. \right] \qquad (1.10)$$

यह हल किये जाने वाले N-समाकल समीकरण $r=1, \ldots, N$, के लिये, निम्नांकित द्वारा दिये जाते हैं।

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty A_r(x_1 u_1, \ldots, x_n u_n) f(u_1, \ldots, u_n)$$

$$\prod_{k=1}^{n} (du_k) = g_r(x_1, \ldots, x_n) \quad (1.11)$$

जहाँ प्रत्येक समीकरण में

$$k=1, \ldots, n;\ v_{r-1}^{(k)} < x_k < v_r^{(k)},\ v_0^{(k)} = 0,\ v_N^{(k)} \to \infty$$ फलन A_r तथा g_r

दिये हुये हैं तथा फलन f का निर्धारण होना है। प्रत्येक फलन A_r (1.4) तथा (1.5) के समान अभिसरण प्रतिबन्ध सन्तुष्ट करते हैं। ये फलन दो प्रकार से लिये जा सकते हैं जिन पर §2 तथा §3 में अलग अलग विचार किया गया है। परिणामत: हमें N-समाकल समीकरणों के दो निकाय प्राप्त होते हैं। N समीकरणों (1.11) का हल भलीभाँति ज्ञात परम्परागत विधि से जिसमें भिन्नात्मक समाकलन संकारकों के उपयोग से अष्टियों को उभयनिष्ठ फूरिये अष्टियों में रूपान्तरित कर के प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार समस्या एकल समाकल समीकरण के हल में बदल जाती है। उभयनिष्ठ फूरिये अष्टि एवं एक अन्य फूरिये अष्टि (जिसे सदा प्राप्त किया जा सकता है) से संतुष्ट होने वाले व्युत्क्रम समीकरण तुरन्त एकल समाकल समीकरण का हल निर्धारित करते हैं।

2. समाकल समीकरणों का प्रथम निकाय

पहले माना कि (1.11) में हम पाते हैं कि

$$A_r(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1} \cdots \int_{L_n} \phi(s_1, \ldots, s_n)$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left\{ \psi_k^{(r)}(s_k)\, x_k^{-s_k}\, ds_k \right\} \quad (2.1)$$

जबकि $\phi(s_1, \ldots, s_n)$ (1.2) द्वारा दिया जाता है तथा

$$\psi_k^{(r)}(s_k) = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma(C_j^{(k,r)} - \gamma_j^{(k)} s_k) \prod_{j=1}^{n_k} \Gamma(1 - D_j^{(k,r)} + \delta_j^{(k)} s_k)}{\prod_{j=m_k+1}^{p_k} \Gamma(1 - C_j^{(k,r)} + \gamma_j^{(k)} s_k) \prod_{j=n_k+1}^{q_k} \Gamma(D_j^{(k,r)} - \delta_j^{(k)} s_k)} \quad (2.2)$$

r-वाँ समाकल समीकरण (1.11), (2.1) तथा मेलिन रूपान्तरण के कारण पुन: इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\psi\,(s_1,\,\ldots,\,s_n)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{\psi_k^{(r)}\,(s_k)\,x_k^{-s_k}\,ds_k\right\}=g_r\,(x_1,\,\ldots,\,x_n) \tag{2.3}$$

जबकि

$$\psi\,(s_1,\,\ldots,\,s_n)=\phi\,(s_1,\,\ldots,\,s_n)\,F\,(1-s_1,\,\ldots,\,1-s_n)$$

तथा

$$F\,(s_1,\,\ldots,\,s_n)=M\,\{f\,(u_1,\,\ldots,\,u_n)\} \tag{2.3}$$

अर्थात् $F\,(s_1,\,\ldots,\,s_n), f\,(u_1,\,\ldots,\,u_n)$ का रीड[1] द्वारा दिये गये प्रतिबन्धों के समान प्रतिबन्धों के अन्तर्गत मैलिन रूपान्तरण है। हमारा उद्देश्य (2.2) के $\psi_k^{(r)}\,(s_k)$ को (1.3) के (2.2) $\phi_k\,(s_k)$ में β-फलन तथा एर्डेल्यी[5] के भिन्नात्मक समाकल संकारकों के उपयोग से रूपान्तरित करना है। β-फलन का निम्नलिखित दो रूपों में प्रयुक्त किया जायेगा

(i) यदि $\mu=1/\alpha,\ R\,(A-a,\ a-\alpha s)>$ तो

$$\int_0^x (x^\mu-t^\mu)^{A-a-1}\,x^{\mu a-s-1}\,dt=\alpha\,\Gamma\,(A-a)\,x^{\mu A-\mu-s}\,\frac{\Gamma\,(a-\alpha s)}{\Gamma\,(A-\alpha s)} \tag{2.4}$$

(ii) यदि $\mu=1/\alpha,\ R\,(A-a,\ a+\alpha s)>0$ तो

$$\int_0^\infty (t^\mu-x^\mu)^{A-a-1}\,t^{\mu-\mu A-s-1}\,dt=\alpha\,\Gamma\,(A-a)\,x^{-\mu a-s}\,\frac{\Gamma\,(a+\alpha s)}{\Gamma\,(A+\alpha s)} \tag{2.5}$$

प्रयुक्त होने वाले भिन्नात्मक समाकल संकारक निम्नलिखित है

$$R\,[\alpha,\,\beta:\mu:w\,(x)]=\frac{\mu}{\Gamma\,(\alpha)}\,x^{-\beta-\mu\alpha+\mu-1}\int_0^x (x^\mu-t^\mu)^{\alpha-1}\,t^\beta\,w\,(t)\cdot dt \tag{2.6}$$

बशर्ते कि

$$w\,(x)\in L^u\,(0,\,\infty),\ u\geqslant 1,\ R\,(\alpha,\,\mu)>0,\ R\,(\beta)+1>\frac{1}{u}$$

तथा

$$S\,[\alpha,\,\beta:\mu:w\,(x)]=\frac{\mu\,x^\beta}{\Gamma\,(\alpha)}\int_x^\infty (t^\mu-x^\mu)^{\alpha-1}\,t^{-\beta-\mu\alpha+\mu-1}\,w\,(t)\,dt \tag{2.7}$$

बशर्ते कि

$$w\,(x)\in L^u\,(0,\,\infty),\ u\geqslant 1,\ R\,(\beta)>-\frac{1}{u},\ R\,(\mu)>0.$$

(2.3) में x_n को t_n से प्रतिस्थापित करें तथा

$$(x_n^{\mu}-t_n^{\mu})^{C_j^{(n,r)}-c_j^{(n)}-1}\, t_n^{\mu c_j^{(n)}-1},\ \mu=\frac{1}{\gamma_j^{(n)}}$$

से गुणा करें एवं t_n के सापेक्ष में 0 से x_n तक जहाँ $v_{r-1}^{(n)}<x_n<v_r^{(n)}$, समाकलित करें तथा (2.4) में बायें तथा (2.6) में दाहिनी ओर उपयोग करें तो हमें प्राप्त होता है

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\psi(s_1,\ldots,s_n)$$

$$\frac{\Gamma(c_j^{(n)}-\gamma_j^{(n)}s_n)}{\Gamma(C_j^{(n,r)}-\gamma_j^{(n)}s_n)}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left\{\psi_k^{(r)}(s_k)x_k^{-s_k}ds_k\right\}=R_j^{(n,r)}g_r(x_1,\ldots,x_n),$$

जहाँ संक्षेप के लिये,

$$R_j^{(n,r)}w(x)=R\left[C_j^{(n,r)}-c_j^{(n)},\ \frac{c_j^{(n)}}{\gamma_j^{(n)}}-1:\frac{1}{\gamma_j^{(n)}}:w(x)\right]$$

(2.3) में ऊपर की भाँति $j=m_n, m_n-1, \ldots, 2, 1$ के लिये उत्तरोत्तर क्रिया करके हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\psi(s_1,\ldots,s_n)$$

$$\prod_{j=1}^{m_n}\left(\frac{\Gamma(c_j^{(n)}-\gamma_j^{(n)}s_n)}{\Gamma(C_j^{(n,r)}-\gamma_j^{(n)}s_n)}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left\{\psi_k^{(r)}(s_k)\,x_k^{-s_k}ds_k\right\}$$

$$=\prod_{j=1}^{m_n}(R_j^{(n,r)})\,g_r(x_1,\ldots,x_n)$$

ऊपर में उपर्युक्त प्रक्रियाओं को

$$c_j^{(n)},\ C_j^{(n,r)},\ \gamma_j^{(n)},\ \prod_{j=1}^{m_n}$$

के स्थान पर क्रमशः

$$D_j^{(n,r)},\ d_j^{(n)},\ \delta_j^{(n)},\ \prod_{j=n_n+1}^{q_n}$$

लेकर दुहराते हुये हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1} \cdots \int_{L_n} \psi(s_1, \ldots, s_n)$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m_n} \Gamma(c_j^{(n)} - \gamma_j^{(n)} s_n) \prod_{j=1}^{n_n} \Gamma(1 - D_j^{(n,r)} + \delta_j^{(n)} s_n)}{\prod_{j=m_n+1}^{p_n} \Gamma(1 - C_j^{(n,r)} + \gamma_j^{(n)} s_n) \prod_{j=n_n+1}^{q_n} \Gamma(d_j^{(n)} - \delta_j^{(n)} s_n)}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left\{\psi_k^{(r)}(s_k)\right\} \prod_{k-1}^{n} \left\{x_k^{-s_k} ds_k\right\}$$

$$= \prod_{j=n_n-1}^{q_n} (R_j^{(n,r),*}) \prod_{j=1}^{m_n} (R_j^{(n,r)}) \, g_r(x, \ldots, x_n)(2.8) \tag{2·8}$$

जबकि

$$R_j^{(n,r),*} w(x) = R\left[d_j^{(n)} - D_j^{(n,r)}, \frac{D_j^{(n,r)}}{\delta_j^{(n)}} - 1 : \frac{1}{\delta_j^{(n)}} : w(x)\right]$$

पुनः, उपरोक्त (2.8) में x_n को t_n से, प्रतिस्थापित करें, तथा

$$(t_n^v - x_n^v)^{d_j^{(n)} - D_j^{(n,r)} - 1} \, t_n^{v D_j^{(n,r)} - 1}, \quad v = \frac{1}{\delta_j^{(n)}}$$

से गुणा करें एवं t_n के सापेक्ष में से x_n से ∞ तक जबकि $v_{r-1}^{(n)} < x_n < v_r^{(n)}$, समाकलन करें एवं (2.5) को बायीं और (2.7) को दायीं ओर उपयोग करें। इस प्रकार (2.8) में उत्तरोत्तर $j = n_n$, $n_n - 1, \ldots, 2, 1$ के लिये कार्य करते हुये हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1} \cdots \int_{L_n} \psi(s_1, \ldots, s_n)$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m_n} \Gamma(c_j^{(n)} - \gamma_j^{(n)} s_n) \prod_{j=1}^{n_n} \Gamma(1 - D_j^{(n)} + \delta_j^{(n)} s_n)}{\prod_{j=m_n+1}^{p_n} \Gamma(1 - C_j^{(n,r)} + \gamma_j^{(n)} s_n) \prod_{j=n_n+1}^{q_n} \Gamma(d_j^{(n)} - \delta_j^{(n)} s_n)}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left\{\psi_k^{(r)}(s_k)\right\} \prod_{k=1}^{n} \left\{x_k^{-s_k} ds_k\right\}$$

$$= \prod_{J=1}^{n_n} (S_j^{(n,r)}) \prod_{j=n_n+1}^{q_n} (R_j^{(n,r),*}) \prod_{j=1}^{m_n} (R_j^{(n,r)}) g_r(x_1, \ldots, x_n)$$

जबकि

$$S_j^{(n,r)*} w(x) = S\left[d_j^{(n)} - D_j^{(n,r)}, \frac{D_j^{(n,r)}}{\delta_j^{(n)}} : \frac{1}{\delta_j^{(n)}} : w(x)\right]$$

ऊपर में अभी वर्णित चरणों को दुहराते हुये तथा

$$d_j^{(n,r)}, D_j^{(n,r)}, \delta_j^{(n)}, \prod_{j=1}^{n_n}$$

के बदले क्रमशः

$$C_j^{(n,r)}, c_j^{(n)}, \gamma_j^{(n)} \prod_{j=m_n+1}^{p_n}$$

लेकर हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1} \cdots \int_{L_n} \psi(s_1, \ldots, s_n) \phi_n(s_n) \prod_{k=1}^{n-1} \left\{\psi_k^{(r)}(s_k)\right\} \prod_{k=1}^{n} (x_k^{-s_k} ds_k)$$

$$= \prod_{j=m_n+1}^{p_n} (S_j^{(n,r),*}) \prod_{j=1}^{n_n} (S_j^{(n,r)}) \prod_{j=n_n+1}^{q_n} (R_j^{(n,r),*})$$

$$\prod_{j=1}^{m_n} (R_j^{(n,r)}) g_r(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.9}$$

जबकि

$$S_j^{(n,r),*} w(x) = S\left[C_j^{(n,r)} - c_j^{(n)} \cdot \frac{1 - C_j^{(n,r)}}{\gamma_j^{(n)}} : \frac{1}{\gamma_j^{(n)}} : w(x)\right]$$

(2.9), (2.3) का उस दशा में लघुकृत रूप जबकि $\psi_n^{(r)}(s_n)$ को $\phi_n(s_n)$ में रूपान्तरित कर दिया जाय। इसी प्रकार (2.9) में $\psi_k^{(r)}(s_k)$ को $\phi_k(s_k)$ में उत्तरोत्तर $k = n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$ के लिये रूपान्तरित करके हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\phi(s_1,\ldots,s_n)\,F(1-s_1,\ldots,1-s_n)$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{n}\left\{\phi_k(s_n)\,x_n^{-s_k}\,ds_k\right\}=h_r(x_1,\ldots,x_n) \qquad (2.10)$$

जबकि $\forall k=1,\ldots,n$

$$h_r(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{j=m_k+1}^{p_k}(S_j^{(k,r),*})\prod_{j=1}^{n_k}(S_j^{(k,r)})\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{j=n_k+1}^{q_k}(R_j^{(k,r),*})\prod_{j=1}^{m_k}(R_j^{(k,r)})\right\}g_r(x_1,\ldots,x_n) \qquad (2.11)$$

तथा $\forall k=1,\ldots,N$

$$v_{r-1}^{(k)}<x_k<v_r^{(k)},\ v_0^{(k)}=0,\ v_N^{(k)}\to\infty.$$

(1.1) में x_k को u_k से प्रतिस्थापित करके हम पाते हैं कि

$$\phi(s_1,\ldots,s_n)\prod_{k=1}^{n}\{\phi_k(s_k)\}=M\{A(u_1,\ldots,u_n)\} \qquad (2.12)$$

(2.3) तथा (2.12) के संकेतन में फाक्स ([6] p. 391) द्वारा प्रदत्त पारसीवाल प्रमेय के यहाँ प्रयुक्त होने वाली उचित प्ररूप निम्नलिखित है

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\phi(s_1,\ldots,s_n)\,F(1-s_1,\ldots,1-s_n)$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{n}\{\phi_k(s_k)\,x_n^{-s_k}\,ds_k\}=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty A(x_1u_1\ldots,x_n,u_n,)$$

$$f(u_1\ldots,u_n)\prod_{k=1}^{n}(du_k) \qquad (2.13)$$

(2.10) तथा (2.13) से अर्थ निकलता है कि

$$h_r(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty A(x_1u_1,\ldots,x_nu_n)\,f(u_1,\ldots,u_n)\prod_{k=1}^{n}(du_k) \qquad (2.14)$$

आइये परिभाषित करें

$$A'(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\frac{1}{\phi(1-s_1,\ldots,1-s_n)}$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{s_k^{-s_k}\,ds_k}{\phi_k(1-s_k)}\right\} \qquad (2.15)$$

जबकि $\phi(s_1, \ldots, s_n)$ तथा $\phi_k(s_k)$ वही है जो (1.2) तथा (1.3) में हैं। इसके पूर्व[3] हमने दिखाया है कि (1.11) तथा (2.15) में फलन $A(x_1, \ldots, x_n)$ तथा $A'(x_1, \ldots, x_n)$, असममित फूरिये अष्टियों का युग्म बनाते हैं। इस हेतु हमने L^1 तथा L^2 समष्टियों में (2.14) द्वारा दिये गये व्युत्क्रम समीकरणों की सत्यता एवं निम्नलिखित को स्थापित किया।

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty A'(x_1 u_1, \ldots, x_n u_n)\; h_r(x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} (du_k) \tag{2.16}$$

फलन $A(x_1, \ldots, x_n)$ एवं $A'(x_1, \ldots, x_n)$ इस प्रकार अभिकल्पित किये गये हैं ताकि औपचारिकताओं अर्थात् A तथा A' के मेलिन रूपान्तरों के फलनिक समीकरणों की संतुष्टि को (2.14) तथा (2.16) के समक्षणिक सत्यता के लिये सन्तुष्ट करते हैं। इसलिये व्युत्क्रम समीकरण (2.14) तथा (2.16) L^u समष्टि में औपचारिक रूप से सत्य है। (2.16) द्वारा प्रदत्त $f(x_1, \ldots, x_n)$ (1.11) द्वारा दिये गये N-समाकल समीकरणों के (1.11) प्रत्येक $r=1, \ldots, N$ के लिये औपचारिक हल है। इसे पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है कि

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^{v_2'} \cdots \int_0^{v_1^{(n)}} A'(x_1 u_1, \ldots, x_n u_n)\, h_1(x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} (du_k)$$

$$+ \int_{v_1'}^{v_2'} \cdots \int_{v_1^{(n)}}^{v_2^{(n)}} A'(x_1 u_1, \ldots, x_n u_n)\, h_2(x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} (du_k)$$

$$+ \text{— — — — — — — — — — — — — — — —}$$

$$+ \int_{v_{N-1}'}^{\infty} \cdots \int_{v_{N-1}^{(n)}}^{\infty} A'(x_1 u_1, \ldots, x_n u_n)\, h\;(x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=0}^{n} (du_k) \tag{2.17}$$

3. समाकल समीकरणों का दूसरा निकाय

अब (1.11) पर विचार करते हुये जब कि $x_k = x\ (\forall + k = 1, \ldots, n)$,

$$v_{r-1} < x < v_r\ (r=1, \ldots, N),\ v_0 = 0,\ v_n \to \infty,$$

तथा

$$A_r(xu_1, \ldots, xu_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1} \cdots \int_{L_n} \phi^{(r)}(s_1, \ldots, s_n)$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n} \{\phi_k(s_k)\,(xu_k)^{-s_k}\, ds_k\} \tag{3.1}$$

जहाँ कि

$$\phi^{(r)} s_1, \ldots, s_n) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(A_j^{(r)} - a_j \sum_{k=1}^{n} s_k) \prod_{j=1}^{n'} \Gamma(1 - B_j^{(r)} + B_j \sum_{k=1}^{n} s_k)}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(1 - A_j^{(r)} + a_j \sum_{k=1}^{n} s_k) \prod_{j=n'+1}^{q} \Gamma(B_j^{(r)} - B_j \sum_{j=1}^{n} s_k)} \tag{3.2}$$

§2 के समान, (3.2) के $\phi^{(r)}(s_1, \ldots, s_n)$ को (1.2) से $\phi(s_1, \ldots, s_n)$ में रूपान्तरित करके हम औपचारिक हल निम्नांकित रूप में प्राप्त करते हैं

$$f(x, \ldots, x) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty A'(xu_1, \ldots, xu_n)\, h_r(u_1, \ldots, u_n) \prod_{k=1}^{n} (du_k) \tag{3.3}$$

जहाँ कि $A'(x_1, \ldots, x_n)$ (2.15) तथा प्रत्येक $r=1, \ldots, N$: के लिये

$$h_r(x, \ldots, x) = \prod_{j=m+1}^{p} (S_j^{(r),*}) \prod_{j=1}^{n'} (S_j^{(r)}) \prod_{j=n'+1}^{q} (R_j^{(r),*}) \prod_{j=1}^{m} (R_j^{(r)})\, g_r(x, \ldots, x) \tag{3.4}$$

$$R_j^{(r)} w(x) = R\left[A_j^{(r)} - a_j, \frac{a_j}{a_j} - 1 : \frac{1}{a_j} : w(x)\right] \tag{3.5}$$

$$R_j^{(r),*} w(x) = R\left[b_j - \beta_j^{(r)}, \frac{B_j^{(r)}}{\beta_j} - 1 : \frac{1}{\beta_j} : w(x)\right], \tag{3.6}$$

$$S_j^{(r)} w(x) = \left[b_j - \beta_j^{(r)}, \frac{1 - b_j}{\beta_j} : \frac{1}{\beta_j} : w(x)\right] \tag{3.7}$$

$$S_j^{(r),*} w(x) = \left[A_j^{(r)} - a_j, \frac{1 - A_j^{(r)}}{a_j} : \frac{1}{a_j} : w(x)\right] \tag{3.8}$$

विस्तार में (3.3) को इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है

$$f(x, \ldots, x) = \int_0^{v_1} \ldots \int_0^{v_1} A'(xu_1, \ldots, xu_n)\, h_1(u_1, \ldots, u_n) \prod_{k=1}^{n} (du_k)$$

$$+ \int_{v_1}^{v_1} \ldots \int_{v_1}^{v_2} A'(xu_1, \ldots, xu_n)\, h_2(u_1, \ldots, u_n) \prod_{k=1}^{n} (du_k)$$

$$+ \text{— — — — — — — — — — — — — — — —}$$

$$+ \int_{v_{N-1}}^{\infty} \ldots \int_{v_{N-1}}^{\infty} A'(xu_1, \ldots, xu_n)\, h_N(u_1, \ldots, u_n) \prod_{k=1}^{n} (du_k)$$

4. A-फलन को अन्तर्ग्रस्त करने वाले N-समीकरण के औपचारिक हल का निगमन

यदि (1.11) तथा (2.17) या (3.9) में हम $n'=0$ लें तथा

$$k=2, \ldots, n : n_k=1=d_1^{(k)},\ x_k \to 0,\ u_k' \to 0,\ \delta_1^{(k)}$$

वास्तविक, धनात्मक हो तो लघुकरण सूत्र (1.10) का उपयोग करके, (1.7) में आने वाले तथा (1.8) एवं (1.9) को सन्तुष्ट करने वाले A-फलन को अन्तर्ग्रस्त करने वाले N-समाकल समीकरणों तथा उनके औपचारिक हल का निगमन किया जा सकता है। ये परिणाम सरलीकृत प्रारूप में, निम्नलिखित हैं : N-समाकल समीकरणों

$$\int_0^\infty A_r(xu)\, f(u)\, du = g_r(x) \tag{4.1}$$

$\forall\ r=1, \ldots, N;\ a_{r-1} < x < a_r\ a_0, =0,\ a_N \to \infty$, का औपचारिक हल निम्नलिखित है

$$f(x) = \int_0^{a_1} A'(xu)\, h_1(u)\, du + \int_{a_2}^{a_1} A'(xu)\, h_2(u)\, du + \ldots + \int_{a_{N-1}}^{\infty} A'(xu)\, h_N(u)\, du \tag{4.2}$$

जबकि $\forall\ r=1, \ldots, N$

$$h_r(x) = \prod_{j=m+1}^{p} (S_j^{(r),*}) \prod_{j=1}^{n} (S_j^{(r)}) \prod_{j=+1}^{q} (R_j^{(r),*}) \prod_{j=1}^{m} (R_j^{(r)})\, g_r(x),$$

$$A_r(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_1^m \Gamma(A_j^{(r)} - \alpha_j s) \prod_1^n \Gamma(1 - B_j^{(r)} + \beta_j s)}{\prod_{m=1}^{p} \Gamma(1 - A_j^{(r)} + \alpha_j s) \prod_{n+1}^{q} \Gamma(B_j^{(r)} - \beta_j s)}\, x^{-s}\, ds,$$

$$A'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{m+1}^{p} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j - \alpha_j s) \prod_{n+1}^{q} \Gamma(b_j - \beta_j + \beta_j s)}{\prod_1^m \Gamma(a_j - \alpha_j + \alpha_j s) \prod_1^n \Gamma(1 - b_j + \beta_j - \beta_j s)}\, x^{-s}\, ds,$$

तथा संकारक R, S (3.5) से (3.8) तक द्वारा दिया जाता है।

5. विशिष्ट दशाएँ

एकल तथा n चरों वाले A-फलनों की व्यापक प्रकृति के कारण पूर्ववर्ती अनुभागों में प्राप्त N-समाकल समीकरणों तथा उनके हलों में अब तक के ज्ञात बहुसंख्या परिणाम विशेष स्थितियों के रूप में शामिल हैं।

प्रथमतः, यदि (1.11) तथा (2.17) या (3.9) में ग्रीक अक्षरों $a_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}$ को वास्तिविक धनात्मक लिया जाय तथा $n'=0$ तो श्रीवास्तव तथा पण्डा[7] के n चरों वाले H-फलनों के लिये N-समाकल समीकरण तथा उनके औपचारिक हल प्राप्त होते हैं। उसी प्रकार यदि (4.1) तथा (4.2) के $a_j, \beta j$ को वास्तविक धनात्मक लें तो फाक्स के H-फलन के लिये N-समीकरण तथा उनके हल प्राप्त होते हैं। इसके अतिरिक्त, यदि उपर्युक्त ग्रीक अक्षरों को इकाई मान लिया जाय तो खाडिया तथा गोयल[8] के n चरों वाले G-फलन तथा माइजर ([9] p. 27) के G-फलन के संगत परिणाम प्राप्त होते हैं।

निर्देश

1. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन०, Revista Matematica, Tucuman. (स्वीकृत)
2. गौतम, जी० पी० तथा गोयल ए० एन० (प्रेषित)
3. गौतम, जी० पी० तथा गोयल ए० एन० (प्रेषित)
4. रीड, आई० एस०, Duke Math. J., 1944, **11**, 565-572.
5. एर्डेल्यी, ए०, Univ., Politec di Torino Rend. Sem. Mat. 1950-51, **10**, 217-234.
6. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **119**, 389-398.
7. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine angew Math, 1976, **283|284**, 264-274.
8. खाडिया, एस० एस० तथा गोयल, ए० एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1970, **13**, 191-201.
9. एर्डेल्यी ए०, मैगनस, डब्लू, ओबरेटिंजर, एफ० तथा ट्रिकोमी, एफ० जी०, Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc.

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 8 पौंड या 32 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० या 2 पौंड या 8 डालर

Rates
Annual Rs. 12 *or* 8 £ *or* $ 32
Per Vol. Rs. 3 *or* 2 £ *or* $ 8

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 29 April 1986 No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजो उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्लो के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

विषय-सूची

कवर के भीतरी पृष्ठ 3 पर अप्रैल 1986 की विषय सूची देखें।
For Contents Apirl 1986, See Inner Cover Page 3.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 29, No. 2, 1986

बहुपदी सेट $\{Z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ के लिए समाकल निरूपण

आर० एन० पाण्डेय, एन० के० तिवारी तथा एस० के० पाण्डेय
संप्रयुक्त गणित अनुभाग, संप्रयुक्त विज्ञान स्कूल
प्रौद्योगिकी संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—अगस्त 29, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में नव परिभाषित बहुपदी सेट (जो पच्चीस से अधिक लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपदों को एकीकृत करता है) में समाहित समाकलों को व्यवकलित किया गया है। प्राप्त निष्कर्ष अपेक्षाकृत नये हैं तथा भौतिकविज्ञानियों एवं गणितज्ञों के लिये उपयोगी हो सकते हैं।

Abstract

Integral representations for the polynomial set $\{Z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ *By* **R. N.** Pandey, N. K. Tiwari and S. K. Pandey, Applied Mathematics Section, School of Applied Sciences, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper, integrals involving newly defined polynomial set $\{Z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ which unifies more than twenty five orthogonal and nonorthogonal polynomials, have been obtained. The results reported here are relatively new and may be useful for physicists and mathematicians.

1. प्रस्तावना

बहुपदी सेट $\{Z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ हरमाइट, जैकोबी, बेटमैन, राइस क्राल तथा फ्रिक, लाग्रान्ज, हान, चार्लियर, मेक्सनर, क्राउचॉक तथा रेकाह् आदि जैसे 25 लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपदों को एकीकृत करता है। इन बहुपदों में समाहित समाकल भौतिकविज्ञानियों तथा इन्जीनियरों के लिये अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं क्योंकि विभिन्न भौतिक समस्याओं को प्रदर्शित करने वाले अवकल समीकरणों, अवकल अन्तर समीकरणों, समाकल-अवकल समीकरणों, अवकल अन्तर समीकरणों, समाकल अवकल समीकरणों आदि

के हल में ये बहुपदी निहित रहते हैं। उदाहरणस्वरूप लागेर, गेगनबॉर तथा जैकोबी बहुपदी स्टर्म-लिवले प्रकार के रैखिक अवकल—जो उष्मा संचरण तथा तरल यांत्रिकी में उपस्थित रहते हैं—के अन्वेषण में उत्पन्न होते हैं। इसी प्रकार डेस्क्रीट बहुपदी (जैसे चार्लियर, मेक्सनर) गणितीय सांख्यिकी में विशेष महत्वपूर्ण हैं।

अतः बहुपदी सेट $\{Z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y)\}$ में समाहित समाकल विषय विकास के लिये अत्यन्त उपयोगी हो सकता है क्योंकि उपर्युक्त बहुपदी इन सभी बहुपदों को एकीकृत करता है। यहाँ व्यवकलित समाकल निम्नलिखित चार प्रकार के हैं :

(i) परिमित एकल समाकल

(ii) अपरिमित एकल समाकल

(iii) परिमित द्विक समाकल

तथा (iv) अपरिमित द्विक समाकल

सभी निष्कर्षों को प्रमेय के रूप में दर्शाया गया है। साथ ही कुछ नये तथा रोचक विशिष्ट दशायें भी व्यवकलित हैं।

2. परिभाषा

नवपरिभाषित बहुपदी को निम्नलिखित जनक सम्बन्ध द्वारा प्रदर्शित करते हैं

$$F\left[\begin{matrix}(a_A)::(b_B);(c_C);(d_D);(e_E);(f_F);(g_G)\\(h_H)::(k_K);(p_P);(q_Q);(u_U);(v_V);(w_W)\end{matrix}\;XYT\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} Z^{*\lambda_1;\lambda_2;a_1;a_2;\beta_1;\beta_2;\gamma_1;\gamma_2;(a_A);(b_B);(c_C);(d_D);(e_E);(f_F);(g_G)}_{\gamma_1 n;\lambda_3;a_3;\beta_3;\gamma_3;(h_H);(k_K);(p_P);(q_Q);(u_U);(v_V);(w_W)}(x,y)\,t^{\gamma_1 n} \tag{2.1}$$

जहाँ

(i) $\lambda_1, \lambda_2, a_1, \beta_1$ आदि वास्तविक संख्यायें हैं,

(ii) $A, B, C, D, \gamma_i\ (i=1, 2, 3)$ ऋणेत्तर पूर्णांक हैं,

(iii) $\sqrt{X}+\sqrt{Y}+\sqrt{T}<1$,

तथा

$$X=\lambda_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} t^{\gamma_1}, \quad Y=\lambda_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} t^{\gamma_2}, \quad T=\lambda_3 x^{\alpha_3} y^{\beta_3} t^{\gamma_3}.$$

उपर्युक्त जनक फलन में त्रिक हाइपरज्यामितीय फलन समाहित है जो लारसेला के चौदह हाइपरज्यामितीय फलन हैं।

समीकरण (2.1) के दक्षिण पक्ष में कई प्राचल हैं। सरलता की दृष्टि से जनक फलन द्वारा प्राप्त बहुपदी को $Z^*_{\gamma_1 n}(x, y)$ से प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

$$Z^*_{\gamma_1 n}(x, y) = R(x, y) \sum_{m=0}^{[n/z_1]} P^*(m)$$

$$F\left[\begin{array}{l} \triangle(z_4;\, 1-(h_H)-n+z_3m),\ \triangle(z_2;\, 1-(k_K)-n+z_3m) \\ \triangle(z_4;\, 1-(q_Q)-n+z_1m),\ \triangle(z_2;\, 1-(u_U)-n+z_3m \\ \triangle(z_2;\, -n+z_1m),\ (c_C)+m,\ (g_G); \\ \triangle(z_4;\, 1-(a_A)-n+z_3m);\ \triangle(z_2;\, 1-(b_B)-n+z_3m) \\ \triangle(z_4;\, 1-(d_D)-n+z_1m),\ \triangle(z_2;\, 1-(e_E)-n+z_1m \\ \quad (p_P)+m,\ (w_W); \\ \qquad \dfrac{S_1}{x^{\alpha^*_1}\, y^{\beta^*_1}} \end{array}\right] \tag{2.2}$$

जहाँ

$$P^*(m) = \frac{\triangle_m[z_3;\, 1-(h_H)-n]\ \triangle_m[z_3;\, 1-(k_K)-n]\ \triangle_m[z_1;\, 1-(q_Q)-n]}{\triangle_m[z_3;\, 1-(a_A)-n]\ \triangle_m[z_3;\, 1-(b_B)-n]\ \triangle_m[z_1;\, 1-(d_D)-n]}$$

$$\frac{\triangle_m[z_1;\, 1-(e_E)-n]\ [(c_C)]_m\ \triangle_m[z_1;\, -n]\ S_2^m}{\triangle_m[z_1;\, 1-(u_U)-n]\ [(p_P)]_m\ x^{\alpha^*_1}\, m\, y^{\beta^*_1}\, m_{m!}} \tag{2.3}$$

$$R(x, y) = \frac{[(a_A)]_n\ [(b_B)]_n\ [(d_D)]_n\ [(e_E)]_n\ \lambda^n_1\ x^{\alpha_1 n}\ y^{\beta_1 n}}{[(h_H)]\ [(k_K)]_n\ [(q_Q)]_n\ [(u_U)]_n} \tag{2.4}$$

$$S_1 = \frac{\lambda_3\,(-z_4)^{z(H+D-A-Q)}}{\lambda_1^{z_2}\,(-z_2)^{z_2(B+E-K-U-1)}} \tag{2.5}$$

$\alpha^*_1 = \alpha_1 z_2 - \alpha_3$ तथा $\beta^*_1 = \beta_1 z_2 - \beta_3$.

समीकरण (2.1) में परिभाषित बहुपदी $Z^*_{\gamma_1 n}(x, y)$ की व्यापकता एवम् इसमें समाहित अनेक निष्कर्षों को; जिनमें से कुछ दशायें पूर्ववर्णित हैं तथा निजकी बहुधा आवश्यकता पड़ती है, ध्यान में रखते हुये यहां हम निम्नलिखित चार समाकल निरूपण की अभिव्यक्ति अत्यन्त आवश्य समझते हैं।

3. परिमित एकल समाकल निरूपण

प्रमेय 1.

$\alpha'>0$ तथा $\beta'>0$ के लिये

$$Z^*_{\gamma_1 n}(x, y) = \frac{\Gamma(\alpha'+\beta')\, R(x, y)}{\Gamma(\alpha')\, \Gamma(\beta')} \int_0^1 t^{\beta'-1} (1-t)^{\alpha'-1} \sum_{m=0}^{[n/z_1]} P^*(m).$$

$$F\left[\begin{array}{l} \triangle(z_4; 1-(h_H)-n+z_3 m),\ \triangle(z_2; 1-(k_K)-n+z_3 m), \\ \triangle(z_4; 1-(q_Q)-n+z_1 m),\ \triangle(z_2; 1-(u_U)-n+n_1 m), \\ ((c_C)+m), (g_G); (\alpha'+\beta');\ \triangle(z_4; 1-(a_A)-n+z_3 m), \\ \triangle(z_2; 1-(b_B)-n+z_3 m),\ \triangle(z_4; 1-(d_D)-n+z_1 m) \\ \triangle(z_2; 1-(e_E)-n+z_1 m), ((p_P)+m), (w_W), (\beta'); \\ \dfrac{S_2\, t}{x^{\alpha^*_2}\, y^{*}_{2}} \end{array}\right] dt \qquad (3.1)$$

उपपत्ति

समीकरण (3.1) के दक्षिण पक्ष को I_1 से प्रदर्शित करके निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$I_1 = \sum_{l=0}^{[n/z_2]} \sum_{m=0}^{[n/z_1]} \frac{P^*(m)\ \triangle_l\,[z_4; 1-(h_H)-n+z_3 m]\ \triangle_l\ z_2; 1-(k_K)-n+z_3 m]}{\triangle_l\,[z_4; 1-(a_A)-n+z_3 m]\ \triangle_l\,[z_2; 1-(b_B)-n+z_3 m]}$$

$$\cdot \frac{\triangle_l[z_4; 1-(q_Q)-n+z_1 m]\ \triangle_l\,[z_2; 1-(u_U)-n+z_3 m]\ \triangle_l\,[z_2; -n+z_1 m]}{\triangle_l\,[z_4; 1-(d_D)-n+z_2 m]\ \triangle_l\,[z_2; 1-(e_E)-n+z_3 m]\,[(p_P)+m]_l}$$

$$\cdot \frac{[(c_C)+m]_l\,[(g_G)]_l\,(\beta'+\alpha')_l\, s_2^{\,l}\ x^{-\alpha^{*}_{2} l}\ y^{-\beta^{*}_{2} l}}{[(w_W)]_l\ l!} \int_0^1 t^{l+\beta'-1} (1-t)^{\alpha'-1}\, dt.$$

यहाँ, विख्यात निष्कर्ष

$$\int_0^1 t^{\beta'-1} (1-t)^{\alpha'-1}\, dt = \frac{\Gamma(\beta')\, \Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha'+\beta')}$$

प्रयुक्त करने पर हम I_1 को निम्नवत् लिख सकते हैं

$$I_1 = \frac{\Gamma(\beta')\, \Gamma(\alpha') \,.\, Z^*_{\gamma_1 n}(x, y)}{\Gamma(\alpha'+\beta')\, R(x, y)}$$

इस व्यंजक के द्वारा हम इच्छित निष्कर्ष (3.1) आसानी से प्राप्त कर सकते हैं ।

व्यापक निष्कर्ष (3.1) के संप्रयोग से हम वर्ग 1 में वर्णित अनेक बहुपदों के लिये समाकल निरूपण कर सकते हैं । इनमें से कुछ निम्नवत् होंगे,

विशिष्ट दशायें

समीकरण (3.1) में $m=0$ से सम्बन्धित पदों को अलग करके तथा

$$\lambda_2=A=B=C=D=H=K=P=Q=\beta_1=a_3=F=V=0,\ a_1=\gamma_1=1$$

से प्रतिस्थापित करके शेष पदों को विशिष्ट मान रखने पर हमें निम्नलिखित कुछ बहुपदी आसानी से प्राप्त हो जाते हैं

(i) $E=0=G,\quad U=W=Y=1=\beta_3=\gamma_3,\ u_1=w_1=1/2=\lambda_1=\lambda_3$

तथा x को $\dfrac{x+1}{x-1}$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$T_n(x)=\frac{\Gamma(\beta'+\alpha')\ (x-1)^n}{2^n\ \Gamma(\beta')\ \Gamma(\alpha')}\int_0^1 t^{\beta'-1}\ (1-t)^{\alpha'-1}$$

$$\cdot F\left[\begin{matrix}-n,\ \tfrac{1}{2}-n,\ \beta'+\alpha' \\ \tfrac{1}{2},\ \beta';\ t\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\end{matrix}\right] dt$$

प्राप्त होता है । $T_n(x)$ को चेबीशेफ बहुपदी (प्रथम प्रकार) कहते हैं ।

(ii) $E=0=G;\ U=w=1=Y=\beta_3\times\gamma_3,\ u_1=1=\alpha=w_1,\ \lambda_1=1/2=\lambda_3$

तथा x को $\dfrac{x+1}{x-1}$ से प्रस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित परागोलीय बहुपदी का समाकल निरूपण प्राप्त होता है

$$P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)=\frac{(1+\alpha)_n\,(x-1)^n\ \ \Gamma(\beta'+\alpha')}{n\,!\,2^n\ \Gamma(\alpha')\ \Gamma(\beta')}\int_0^1 t^{\beta'-1}\cdot(1-t)^{\alpha'-1}$$

$$\cdot F\left[\begin{matrix}-n,\ -\alpha-n,\ \beta'-\alpha'; \\ 1+\alpha;\ \beta';\ t\left(\dfrac{x+1}{x+1}\right)\end{matrix}\right] dt$$

इसी प्रकार अनेक बहुपदों के लिये समाकल निरूपण किये गये हैं जिन्हें यहाँ नहीं व्यक्त किया जा रहा है ।

4. अपरिमित समाकल निरूपण

प्रमेय 2.

$R(s) > R|(v)|$ तथा $R(\alpha) > 0$ के लिये

$$Z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y) = \frac{R(x, y)\ \Gamma(s+\frac{1}{2}) \cdot (2\alpha)^s}{\Gamma(s+v)\ \pi^{1/2}}$$

$$\cdot \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\alpha t} k_v(\alpha t) \sum_{l=0}^{[n/z_1]} P^{**}(l)$$

$$F \left[\begin{array}{l} \triangle(z_3;\ 1-(h_H)-n+z_4 l),\ \triangle(z_3;\ 1-(k_K)-n+z_2 l), \\ \triangle(z_1;\ 1-(q_Q)-n+z_4 l),\ \triangle(z_1;\ 1-(u_U)-n+z_2 l), \\ \triangle(z_1;\ -n+z_2 l),\ (c_C)+m,\ (f_F)+m,\ s+\frac{1}{2}; \\ \triangle(z_3;\ 1-(a_A)-n+z_4 l),\ \triangle(z_3;\ 1-(b_B)-n+z_2 l), \\ \triangle(z_1;\ 1-(d_D)-n+z_4 l),\ \triangle(z_1;\ 1-(e_E)-n+z_2 l), \\ (p_P)+l,\ (v_V),\ s\pm v; \\ \dfrac{s_2\ t\ (2\alpha)}{t^{\alpha_2^*}\ y^{\beta_2^*}} \end{array} \right] dt \tag{4.1}$$

उपपत्ति

निष्कर्ष [3; p. 78]

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-\alpha t} k_v(\alpha t)\ dt = \frac{\pi^{1/2}\ \Gamma(s\pm v)}{(2\alpha)^s\ \Gamma(s+\frac{1}{2})}$$

के सम्प्रयोग से हम निष्कर्ष (4.1) को आसानी से प्राप्त कर सकते हैं।

हम वर्ग-1 में वर्णित कई बहुपदों के लिये समाकल निरूपण कर सकते हैं। इनमें से कुछ निम्नवत् हैं।

विशिष्ट दशायें

समीकरण (4.1) में $l=0$ से सम्बन्धित पदों को अलग करके

$$\lambda_3 = A = B = C = D = H = K = P = Q = \beta_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 = 1 = \gamma_1$$

से प्रतिस्थापित करके शेष प्राचलों का विशिष्ट मान रखने पर हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं

(i) $E=U=V=F=\lambda_1=x=y=1=\gamma_2=\beta_2=u_1=v_1,\ \lambda_2=-1\ e_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^*.$

तथा $f_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^*$ से प्रतिस्थापित करने पर हम बेटमैन बहुपदी $F_n(z)^*$ का समाकल निरूपण निम्नवत् कर सकते हैं

$$F_n(z^*)=\frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^*)_n\, \Gamma(s+\frac{1}{2})\ (2\ a)^s}{(1)_n\, \Gamma(s\pm v)\ \pi^{1/2}}\int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-\alpha t}\, k_v(\alpha\ t)$$

$$.\ F\begin{bmatrix} -n,\ -n,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z,\ s+\frac{1}{2} & \\ & 2\alpha\ t \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z-n,\ 1,\ s\pm v; & \end{bmatrix} dt$$

(ii) समीकरण (4.1) में

$$E=0=F;\ \gamma_2=U=V=1=y=\beta_2;\ u_1=1+\alpha,\ v_1=1+\beta,\ \lambda_1=\frac{1}{2}=\gamma_2$$

तथा x को $\dfrac{x-1}{x+1}$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(1+\beta)_n\,(x-1)^n\, \Gamma(s+\frac{1}{2})\ .\ (2a)^s}{2^n\ .\ n!\ \Gamma(s\pm v)\ \pi^{1/2}}\ .\ \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-\alpha t}\, k_v(at)$$

$$.\ F\begin{bmatrix} -n,\ -\alpha-n,\ s+\frac{1}{2}; & \\ & \frac{(x+1)\ .\ 2\ \alpha\ t}{(x+1)} \\ s\pm v,\ 1+\beta & \end{bmatrix} dt$$

प्राप्त होता है। यहा $P_n^{(\alpha,\beta)}$ जैकोबी बहुपदी है।

(iii) $E=0=U,\ F=V=x=1=y=\lambda=\beta_2=\gamma_2;\ \lambda_2=1-e^{2i\phi}.\ f_1=\lambda^*{}_1-ix;\ v_1=\lambda^*$

रखने पर हमें

$$P_n^*(x,\phi)=\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})\ (2a)^s\ (2\lambda)_n}{n!\ \Gamma(s\pm v)\ \pi^{1/2}}\int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-\alpha t}\, k_v(\alpha\ t)$$

$$.\ F\begin{bmatrix} -n,\ -ix,\ s+\frac{1}{2}; & \\ & 2\alpha\ t\ (1-e^{2i\phi}) \\ 2\lambda^*,\ s\pm v & \end{bmatrix} dt$$

प्राप्त होता है। यहा $P_n^*(x,\phi)$ पॉलजैक बहुपदी है।

5 परिमित द्विक समाकल निरूपण

प्रमेय 3

$Re\ (\rho) > 0$ तथा $Re\ (\xi) > 0$ के लिये हमें

$$Z^{*}_{\gamma_1 n}(x, y \quad \frac{R(x, y)\, \Gamma(\rho+\xi)}{\Gamma(\rho)\, \Gamma(\xi)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{\rho-1} (1-\beta)^{\xi-1}}{(1-\alpha\beta)^{\rho+\xi-1}} \sum_{m=0}^{[n/z_1]} \rho^* (m)$$

$$F \left[\begin{array}{l} \triangle(z_4;\, 1-(h_H)-n+z_3 m)\ \triangle(z_2;\, 1-(k_K)-n+z_3 m), \\ \triangle(z_4;\, 1-(q_Q)-n+z_1 m),\ \triangle(z_2;\, 1-(u_U)-n+z_1 m), \\ \triangle(z_2;\, 1-n+z_1 m),\, (c_C)+m,\, (g_G),\, \dfrac{\rho+\xi}{2},\ \dfrac{\xi+\rho-1}{2}; \\ \triangle(z_4;\, 1-(a_A)-n+z_2 m),\ \triangle(z_2;\, 1-(b_B)-n+z_3 m), \\ \triangle(z_4;\, 1-(d_D)-n+z_1 m),\ \triangle(z_2;\, 1-(e_E)-n+z_1 m), \\ \quad (p_P)+m,\, (w_W),\, \rho,\, \xi; \\ \dfrac{s_1\, (1-\alpha)\, \beta\, (1-\beta)}{x^{\alpha^*_1}\, y^{\beta^*_1}\, (1-\alpha\beta)^2} \end{array} \right] d\alpha\, d\beta \tag{5.1}$$

प्राप्त होता है।

उपपत्ति

निष्कर्ष [1: p. 145]

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{\rho-1}\, \beta^{\rho}\, (1-\beta)^{\xi-1}}{(1-\alpha\beta)^{\rho+\xi-1}}\, d\alpha\, d\beta = \frac{\Gamma(\rho)\, \Gamma(\xi)}{\Gamma(\rho+\xi)}$$

के संप्रयोग से हम (5.1) आसानी से प्राप्त कर लेते हैं।

विशिष्ट दशायें

(5.1) में $m=0$ से सम्बन्धित पदों को अलग करके

$$\lambda_2 = A = B = C = D = H = K = P = Q = \alpha_3 = \beta_1 = F = V = 0 = \alpha_1 = \gamma_1 = 1$$

से प्रतिस्थापित करके शेष प्राचलों के विशिष्टिकरण से हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

(i) $E=0=U,\ G=W=w_1=1=\gamma_3=x=\lambda_1=\beta_3=\lambda_3,\ g_1=1+x$

तथा $y=\frac{1}{1-e^{-\lambda*}}$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\phi(x,\ \lambda^*)=\frac{\Gamma(\rho+\xi)}{\Gamma(\rho)\ \Gamma(\xi)}\int_0^1\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{\rho-1}\ \beta^{\rho}\ (1-\beta)^{\xi-1}}{(1-\alpha\ \beta)^{\rho+\xi-1}}$$

$$F\left[\begin{matrix}-n,\ 1+x,\ \frac{\rho+\xi}{2},\ \frac{\rho+\xi-1}{2}\ ; \\ \\ 1,\ \rho,\ \xi\end{matrix}\ \ \frac{\beta(1-\beta)\ (1-e^{-\lambda})\ (1-\alpha)}{(-\alpha\ \beta)^2}\right]d\alpha\ d\beta$$

प्राप्त होता है। यहाँ $\phi\ (x,\ \lambda^*)$ गैटलेब बहुपदी है।

(ii) जब

$$E=U=W=0,\ G=\lambda_1=\lambda_2=\gamma_3=\beta_3=y_1$$

तथा $g_1=x$ हो तो (5.1) से

$$\phi_n\ (x)=\frac{x^n\ \Gamma(\rho+\xi)}{n!\ \Gamma(\xi)\Gamma\ (\rho)}\int_0^1\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{\rho-1}\ \beta^{\rho}\ (1-\beta)^{\xi-1}}{(1-\alpha\ \beta)^{\rho+\xi-1}}$$

$$F\left[\begin{matrix}-n,\ x,\ \frac{\rho+\xi}{2},\ \frac{\rho+\xi-1}{2}\ ; \\ \\ \rho,\ \xi\end{matrix}\ \ \frac{-(1-\alpha)\ (1-\beta)^{\beta}}{(1-\alpha\ \beta)^2\ x}\right]d\alpha\ d\beta$$

प्राप्त होता है; जहाँ $\phi_n\ (x)$ सिल्वेस्टर बहुपदी है।

6. अपरिमित द्विक समाकल निरूपण

प्रमेय 4

$Re\ (\alpha)>0,\ Re\ (\beta)>0,\ \sigma_1>0$ तथा $\sigma_2>0$ के लिये

$$Z^*_{\gamma_1 n}\ (x,\ y)=\frac{(R,\ y)\ .\ 4\ \sigma_1^{\alpha}\ \sigma_2^{\beta}}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha-1}\ .\ \xi^{2\beta-1}$$

$$.\ e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma_2\xi^2)}\ .\sum_{l=0}^{[n/z_1]}\rho^{**}\ (l)\ .$$

$$F\left[\begin{array}{l}\triangle(z_3;\, 1-(h_H)-n+z_4l),\ \triangle(z_3;\, 1-(k_K)-n+z_2l),\\ \triangle(z_1;\, 1-(q_Q)-n+z_4l),\ \triangle(z_1;\, 1-(u_U)-n+z_2l),\\ \triangle(z_1;\, 1-n+z_2l),\ (c_C)+l,\ (f_{(F)});\\ \triangle(z_3;\, 1-(a_A)-n+z_4l),\ \triangle(z_3;\, 1-(b_B)-n+z_2l),\\ \triangle(z_1;\, 1-(d)-n+z_4l,\ \triangle(z_1;\, 1-(e_E)-n+z_2l),\\ (p_P)+l;\ (v_V),\\ \dfrac{s_2\, \rho^2\, \sigma_2\, \xi^2\, \sigma_2}{x^{\alpha_1^*}\, y^{\beta_1^*}}\end{array}\right] d\rho\, d\xi \qquad (6.1)$$

प्राप्त होता है।

उपपत्ति

निष्कर्ष

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \rho^{2\alpha-1}\, \xi^{2\beta-1}\, e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma_2\xi^2)}\, d\rho\, d\xi = \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)}{4\sigma_1^{\alpha}\, \sigma_2^{\beta}}$$

के सम्प्रयोग से (6.1) आसानी ने प्राप्त किया जा सकता है।

विशिष्ट दशायें

(6.1) में $l=0$ से सम्बन्धित पदों को अलग करके

$$\lambda_3=A=B=C=D=H=K=P=Q=\beta_1=\alpha_2=0,\ \alpha_1=\gamma_1=1$$

रखकर शेष प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें निम्नलिखित रोचक निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

(i) जब

$$E=0=F,\ \beta_2=\gamma_2=1=U=V=y,\ u_1=\lambda+\tfrac{1}{2}=v_1,\ \lambda_1=\tfrac{1}{2}=\lambda_2$$

तथा x को $\dfrac{x+1}{x-1}$ से प्रतिस्थापित करें तो हमें

$$C_n^{\lambda}(x)=\frac{(2\lambda)_n\, (x+1)^n\, 4\sigma^{\alpha}{}_1\sigma^{\beta}{}_2}{2^n\, n!\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty \rho^{2\alpha-1}\, \xi^{2\beta-1}\, .\, e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma_2\xi^2)}$$

$$F\left[\begin{matrix}-n, \frac{1}{2}-\lambda-n\,; \\ \\ \lambda+\frac{1}{2},\ \alpha,\ \beta;\end{matrix}\ \frac{\rho^2\,\xi^2\,\sigma_1\,\sigma_2\,(x-1)}{(x+1)}\right] d\rho\ d\xi$$

प्राप्त होता है। यहाँ $\overset{\lambda}{C_n}(x)$ गेगनबॉर बहुपदी है।

(ii) यदि

$$E=F=U=0,\ \beta_2=V=1=y=\lambda_1,\ \gamma_2=2,\ \nu_1=\lambda_2=\tfrac{1}{4}$$

तथा x को $\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ से प्रतिस्थापित करें तो हमें

$$\rho_n(x)=\frac{x^n\,.\,4\sigma^{\alpha}{}_1\,\sigma^{\beta}{}_2}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha-1}\,\xi^{2\beta-1}\,e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma_2\xi^2)}$$

$$F\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\ \frac{-n+1}{2} \\ \\ 1,\ \alpha,\beta;\end{matrix}\ \frac{\sigma_1\,\sigma_2\,\rho^2\,\xi^2\,(x^2-1)}{x^2}\right] d\rho\ d\xi$$

प्राप्त होता है। यहाँ $\rho_n(x)$ लेगेन्ड्र बहुपदी है।

(iii) यदि

$$E=F=U=V=0,\ \beta_2=1=y,\ \lambda_2=2=\gamma_2$$

तथा $\lambda_2=-1$ रखें तो हमें

$$H_n(x)=\frac{(2x)^n\,.\,4\sigma^{\alpha}{}_1\,\sigma^{\beta}{}_2}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\rho^{2\alpha-1}\,.\,\xi^{2\beta-1}\,.\,e^{-(\sigma_1\rho^2+\sigma_2\xi^2)}$$

$$\cdot F\left[\begin{matrix}-\frac{n}{2},\ \frac{-n+1}{2} \\ \\ \alpha,\ \beta;\end{matrix}\ -1/x^2\right] d\rho\ d\xi$$

प्राप्त होता है। यहाँ $H_n(x)$ हरमाइट बहुपदी है।

इसी प्रकार अन्य प्राचलों के विशिष्टीकरण से बेडिएण्ट, मेक्सनॅर, चार्लियर, गोल्डहॉपर तथा रेकाह आदि बहुपदी के लिये भी समाकल निरूपण प्राप्त किये गये हैं लेकिन उन्हें यहाँ नहीं दिया जा रहा है।

निर्देश

1. लारीसेला, जी० **रेण्ड० सर्क० मैट० पैलरेनो**, 1893, 7, 111-158

2. पाण्डेय आर० एन०, एन० के० तिवारी तथा एस० के० पाण्डेय, **इण्डि० साइंस कांग्रे० एसोस०**, 1982.

3. रेनविले, ई० डी०, Special Function, द मैकमिलन कं०, न्यूयार्क 1960.

4. विलसन, जे० ए०, **एस० आई० ए० एम० जे० मैथ०एनॅल०**, 1980, 11(4), 690-701.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 2, 1986

समाकल रूपान्तरों के लिये सार्वीकृत सम्मिश्र विलोमन प्रमेय

नरोत्तम जोशी

गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय,

जयहरिखाल लैंसडाउन, गढ़वाल (उ०प्र०)

[प्राप्त—मई 18, 1984]

सारांश.

प्रस्तुत प्रपत्र में समाकल रूपान्तरों के लिये सम्मिश्र विलोमन प्रमेय दिये गये हैं।

Abstract

The generalized complex inversion theorems for integral transforms. *By* Narottam Joshi, Department of Mathematics, Government Degree College, Jaihari Khal (Lansdowne), Garhval (U. P.).

In the present paper, the generalized complex inversion theorems are given for integral transforms.

1. प्रस्तावना

समाकल रूपान्तरों की एक बड़ी संख्या को दो किस्मों में विभाजित किया जा सकता है, जो निम्नलिखित समीकरणों द्वारा परिभाषित हैं :

$$T_1\,[f(t);\,s]=s\int_0^\infty k_1\,(st)\;f(t)\;dt \tag{1.1}$$

तथा

$$T_2\,[f(t);\,s]=\frac{1}{s}\int_0^\infty k_2\left(\frac{t}{s}\right)\,f(t)\;dt \tag{1.2}$$

समाकल रूपान्तरों के लिये फूरिये-मेलिन विलोमन प्रमेय [2, p. 46] के उपयोग से स्थापित सम्मिश्र विलोमन प्रमेय ज्ञात हैं। इस प्रपत्र का उद्देश्य फूरिये-मेलिन विलोमन प्रमेय के उपयोग से समीकरण (1.1) तथा (1.2) द्वारा परिभाषित समाकल रूपान्तरों के लिये सार्वीकृत सम्मिश्र विलोमन प्रमेय प्रस्तुत करना है।

इस सम्पूर्ण प्रपत्र में, $M[f(t); s]$ फलन $f(t)$ के मेलिन रूपान्तर का प्रतीक है।

2. सार्वीकृत सम्मिश्र विलोमन प्रमेय

प्रमेय 1. यदि $\phi(s)$ निम्नलिखित रूप में परिभाषित हो

$$\phi(s)=s\int_0^\infty k_1(st)\, f(t)\, dt$$

तो

$$\tfrac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-k}\,\frac{M[\phi(s); -k]}{M[k_1(s); -k+1]}\, dk,$$

बशर्ते कि

(i) $f(y)$, बिन्दु $y=t$ के पार्श्व में परिबद्ध विचरण वाला हो,

(ii) $|f(t)|$ के T_1-रूपान्तर का अस्तित्व हो,

तथा (iii) $|f(t)|$ तथा $|k_1(t)|$ के मेलिन रूपान्तर अस्तित्व में हों।

उपपत्ति

समीकरण (2.1) से हम पाते हैं

$$\int_0^\infty s^{-k-1}\phi(s)\, ds=\int_0^\infty s^{-k}\left\{\int_0^\infty k_1(st)\, f(t)\, dt\right\} ds \tag{2.2}$$

समीकरण (2.2) में समाकलन-क्रम बदलने पर तथा फिर एक साधारण चर-परिवर्तन करने पर

$$\int_0^\infty s^{-k-1}\phi(s)\, ds=\int_0^\infty t^{k-1} f(t)\, dt\int_0^\infty u^{-k} k_1(u)\, du \tag{2.3}$$

अथवा

$$\int_0^\infty t^{k-1} f(t)\, dt=\frac{M[\phi(s); -k]}{M[k_1(s); -k+1]} \tag{2.4}$$

समीकरण (2.4) में फूरिये-मेलिन विलोमन प्रमेय [2, p. 46] का उपयोग करने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

जहाँ तक समीकरण (2.2) में समाकलन के क्रम में परिवर्तन का प्रश्न है, हम पाते हैं कि t-समाकल परम अभिसारी होता है $|f(t)|$ का T_1-रूपान्तर अस्तित्व में हो, s-समाकल अभिसारी है यदि $|k_1(t)|$ का मेलिन रूपान्तर अस्तित्व में हो तथा इनके परिणामस्वरूप प्राप्त समाकल परम अभिसारी है यदि $t^{k-1} f(t) L\epsilon(0, \infty)$। इस तरह समाकलन के क्रम में परिवर्तन द ला वाले पूसां के प्रमेय [1, p. 504] द्वारा वैध है।

प्रमेय 2

यदि $\phi(s)$, समीकरण (1.2) द्वारा परिभाषित हो तो

$$\tfrac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-k}\frac{M[\phi(s);k]}{M[k_2(s);-k+1]}dk$$

बशर्ते कि

(i) $f(y)$, बिन्दु $y=t$ के पार्श्व में परिबद्ध विचरण वाला हो,

(ii) $|f(t)|$ का T_2-रूपान्तर अस्तित्व में हो,

तथा (iii) $|f(t)|$ तथा $|k_2(t)|$ के मेलिन रूपान्तर का अस्तित्व हो।

इस प्रमेय की उपपत्ति प्रमेय 1 की उपपत्ति के ही समान है। अतः इसकी उपपत्ति नहीं दी गयी है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० जे० एम० सी० जोशी, प्राचार्य, राजकीय महाविद्यालय, नारायण नगर, पिथौरागढ़ का आभारी है, जिन्होंने सतत प्रेरणा प्रदान की।

निर्देश

1. ब्रामविच, टी० जे०, आई० ए०, An Introduction to the Theory of Infinite Series, सेन्ट मार्टिन्स प्रेस, लन्दन, 1955.

2. टिचमार्श, ई० सी०, Introduction to the Theory of Fourier Integrals. आक्सफोर्ड, 1948.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 2, 1986

दो अचर राशियों के H-फलन वाले कतिपय द्विगुण समाकल

अशोक कुमार रोंधे

सोनकर भवन, नंदवाना, विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त—नवम्बर 17, 1984]

सारांश

Abstract

A double integral involving the *H*-Function of two variables. *By* Ashok Kumar Ronghe, Sonekar Bhawan, Nandvana, Vidisha (M. P.)

A double integral involving *H*-function of two variable has been evaluated. Few interesting known as well as new results have been deduced as particular cases.

1. प्रस्तावना

दो अचर राशियों का *H*-फलन गुप्ता एवं मित्तल [2, p. 117-123] ने प्रदान किया है थात श्रीवास्तव एवं पंडा [5, p. 256, eq. (1-5) et. seq] ने निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित किया ।

$$H[z_1, z_2] = H\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$H^{o,n;\, m_2,n_2;\, m_3,n_3}_{p_1,q_1;\, p_2,q_2;\, p_3,q_3}\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} (a_j;\, \alpha_j, A_j)_{1,p_1};\, (c_j,\gamma_j)_{1,p_2};\, (e_j,\, E_j)_{1,p_3} \\ (b_j;\, \beta_j, B_j)_{1,q_1};\, (d_j,\delta_j)_{1,q_2};\, (f_j, F_j)_{1,q_3} \end{matrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L1}\int_{L2} \phi_1(\xi,\eta)\, \theta_2(\xi)\, \theta_3(\eta)\, z_1^{\xi} \,.\, z_2^{\eta}\, d\xi\, d\eta. \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_1(\xi,\eta) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+A_j\eta)}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j-\alpha_j\xi-A_j\eta) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+\beta_j\xi+B_j\eta)} \tag{1.2}$$

$$\theta_2(\xi)=\frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j\xi)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-\delta_j\xi)}{\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j\xi)\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j\xi)} \tag{1.3}$$

$$\theta_3(\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j\eta)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j\xi)}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_j\eta)\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_j\xi)} \tag{1.4}$$

जबकि (1.1) में z_1 एवं z_2 शून्य के बराबर नहीं है और रिक्त गुणनखण्ड को इकाई के रूप में प्रदर्शित किया गया है ।

p_i, q_i, n_i और m_i धनात्मक पूर्णांक हैं, जैसे कि $p_i \geqslant n_i \geqslant o$, $q_i \geqslant o$, $q_j \geqslant m_j \geqslant o$, $(i=1, 2, 3, j=2, 3)$ आगे। सभी $A's$, $\alpha's$, $B's$, $\beta's$, $\gamma's$, $E's$ और $F's$ संकेतों को धनात्मक राशियों के रूप में लिया गया है जिससे मानकीकरण में सुविधा रहे ।

निम्नलिखित संक्षिप्तीकरणों का प्रयोग किया गया है ।

$$R=\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j+\sum_{j=1}^{p_2}\gamma_j-\sum_{j=1}^{q_1}\beta_j-\sum_{j=1}^{q_2}\delta_j<0 \tag{1.5}$$

$$S=\sum_{j=1}^{p_1}A_j+\sum_{j=1}^{p_3}E_j-\sum_{j=1}^{q_1}B_j-\sum_{j=1}^{q_3}F_j<0 \tag{1.6}$$

$$U=-\sum_{j=n_1+1}^{p_1}\alpha_j-\sum_{j=1}^{q_1}\beta_j+\sum_{j=1}^{m_2}\delta_j-\sum_{j=m_2+1}^{q_2}\delta_j+\sum_{j=1}^{n_2}\gamma_j-\sum_{j=1}^{p_2}\gamma_j>0 \tag{1.7}$$

$$V=-\sum_{j=n_1+1}^{p_1}A_j-\sum_{j=1}^{q_1}B_j+\sum_{j=1}^{m_1}F_j-\sum_{j=m_3+1}^{q_2}F_j+\sum_{j=1}^{n_3}E_j-\sum_{j=1}^{p_2}E_j>0 \tag{1.8}$$

$$|\arg z_1|<\tfrac{1}{2}u\pi, \tag{1.9}$$

$$|\arg z_2|<\tfrac{1}{2}v\pi, \tag{1.10}$$

$(a_j,\alpha_jA_j)_{1,p_1}$, $(c_j,\gamma_j)_{1,p_2}$, $(e_j,E_j)_{1,p_3}$ और $(b_j,\beta_jB_j)_{1,q_1}$, $(d_j,\delta_j)_{1,q_2}$, $(f_j,F_j)_{1,q_3}$ के प्राचलों के समुच्चयों को क्रमशः P_1, P_2, P_3 और Q_1, Q_2, Q_3 द्वारा प्रदर्शित किया गया है ।

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित परिणामों एवं गुणों का उपयोग करेंगे ।

मेकराबर्ट[1] [p.450-452]

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} d\theta = e^{1/2 i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{1.11}$$

शर्मा[3]

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} [ax+b(1-x)]^{-\alpha-\beta} {}_2F_1 [c, d : \alpha : ax/ax+b(1-x)]\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta-c-d)}{a^{\alpha}\, b^{\beta}\, \Gamma(\alpha+\beta-c)\,\Gamma(\alpha+\beta-d)} \tag{1.12}$$

जहाँ $Re(\alpha)>o$, $Re(\beta)>o$, $Re(\alpha+\beta-c-d)>o$, a और b शून्येत्तर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$ जहाँ $o\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

2. प्रमुख समाकलन

इस प्रपत्र में निम्नलिखित द्विगुण समाकलन का मूल्यांकन किया गया है

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} x^{\gamma-1} (1-x)^{\delta} [ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$${}_2F_1 [c, d : \alpha : ax/ax+b(1-x)]$$

$$H^{o,n_1;\, m_2,n_2;\, m_3,n_3}_{p_1,q_1;\, p_2,q_2;\, p_3,q_3} \left[\begin{matrix} z_1\, e^{i(\lambda_1+\mu_1)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_1} (\cos\theta)^{\mu_1} x^{\sigma_1} \\ z_2\, e^{i(\lambda_2+\mu_2)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_2} (\cos\theta)^{\mu_2} x^{\sigma_2} \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (1-x)^{\rho_1} [ax+b(1-x)]^{-\sigma_1-\rho_1} \\ (1-x)^{\rho_2} [ax+b(1-x)]^{-\sigma_2-\rho_2} \end{matrix} \right] d\theta\, dx \tag{2.1}$$

$$\frac{e^{1/2 i\pi\alpha}}{a^{\gamma}\, b^{\delta}}\, H^{o,n_1+s;\, m_2,n_2;\, m_3,n_3}_{p_1+s,q_1+3;\, p_2,q_2;\, p_3,q_3} \left[\begin{matrix} z_1\, e^{1/2 i\pi\lambda_1}/a^{\sigma_1} \,.\, b^{\rho_1} \\ z_2\, e^{1/2 i\pi\lambda_2}/a^{\sigma_2} \,.\, b^{\rho_2} \end{matrix} \right|$$

$$\left. \begin{matrix} (1-\alpha : \lambda_1,\lambda_2)\,(1-\beta : \mu_1,\mu_2)\,(1-\gamma : \sigma_1,\sigma_2)\,(1-\delta : \rho_1,\rho_2) \\ (1-\gamma-\delta+c+d : \sigma_1+\rho_1; \sigma_2+\rho_2)\, P_1; P_2; P_3 \\ (1-\alpha-\beta; \lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2)\,(1-\gamma-\delta+c; \sigma_1+\rho_1, \sigma_2+\rho_2) \\ (1-\gamma-\delta+d; \sigma_1+\rho_1, \sigma_2+\rho_2)\, Q_1; Q_2; Q_3) \end{matrix} \right]$$

समाकलन (3.1) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है

प्रतिबन्ध

$\gamma, \delta, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2$ धनात्मक वास्तविक राशियाँ है एवं वे सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं।

$$Re\,(\alpha)>0,\ Re\,(\beta)>0,\ |\arg z_1|>\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|>\tfrac{1}{2}v\pi$$

$$Re\,[(\alpha)+\lambda_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2}(d_j/\delta_j)+\lambda_2 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3}(f_j/F_j)]>0$$

$$Re\,[(\beta)+\mu_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2}(d_j/\delta_j)+\mu_2 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3}(f_j/F_j)]>0$$

$$Re\,(\delta)+\rho_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2}(d_j/\delta_j)+\rho_2 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3}(f_j/F_j])>0$$

$$Re\,[(\gamma)+\sigma_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2}(d_j/\delta_j)+\sigma_2 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3}(f_j/F_j)]>0$$

a और b शून्येतर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b\,(1-x)]$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

उपपत्ति

(2.1) को सिद्ध करने के लिये हम वाम पक्ष को I द्वारा अंकित करते हैं। H-फलन को (1.1) की सहायता से द्विगुण समाकलन के रूप में प्रदर्शित करने पर समाकलन के क्रम को यह मानते हुये कि इस प्रक्रिया में सन्निहित समाकलन पूर्णतया अभिसारी है बदलने पर हमें निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$I=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{L1}\int_{L2}\phi_1(\xi.\eta)\,\theta_2(\xi)\,\theta_3(\eta)\,z_1^{\xi}\,z_2^{\eta}$$

$$\left[\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta+\lambda_1\xi+\lambda_2\eta+\mu_1\xi+\mu_2\eta)}(\sin\theta)^{\alpha+\lambda_1\xi+\lambda_2\eta-1}(\cos\theta)^{\beta+\mu_1\xi+\mu_2\eta-1}\,d\theta\right.$$

$$\int_0^1 x^{\gamma+\sigma_1\xi+\sigma_2\eta-1}(1-x)^{\delta+\rho_1\xi+\rho_2\eta-1}[ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta-(\sigma_1+\rho_1\xi-(\sigma_2+\rho_2)\eta}$$

$$ {}_2F_1\,[c\,.\,d:a:ax/ax+b\,(1-x)]\,dx]\,d\xi\,.\,d\eta$$

अब (1.11) और (1.12) की सहायता से दोनों आन्तरिक समाकलों का मान रखने तथा परिणाम की विवेचना में (1.1) की सहायता लेने पर, हमें (3.1) के दायें पक्ष की प्रप्ति होती है।

3. विशिष्ट दशायें

हम यहाँ पर कुछ रोचक समाकलनों का विवेचना करेंगे।

यदि (2.1) में $d=a$ तथा $c=0$ रखें तो हमें निम्न परिणाम प्राप्त होगा

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}$$

$$H^{0,n_1;m_2,n_2;\, m_3,n_3}_{p_1,q_1;\, p_2,q_2;\, p_3,q_3}\left[\begin{matrix} z_1\, e^{i(\lambda_1\mu_1)\theta}\, (\sin\theta)^{\lambda_1}\, (\cos\theta)^{\mu_1} \\ z_2\, e^{i(\lambda_2+\mu_2)\theta}\, (\sin\theta)^{\lambda_2}\, (\cos\theta)^{\mu_2} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} x^{\sigma_1}\,(1-x)^{\rho_1}\,[ax+b\,(1-x)]^{-\sigma_1-\rho_1} \\ x^{\sigma_2}\,(1-x)^{\rho_2}\,[ax+b\,(1-x)]^{-\sigma_2-\rho_2} \end{matrix}\right]d\theta\, dx$$

$$=\frac{e^{1/2i\pi\alpha}}{a^{\gamma}\, b^{\delta}}\; H^{0,n_1+4;\, m_2,n_2\, :\, m_3,n_3}_{p_1+4;\; q_2+2,\; p_2,q_2\, :\, p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1\, e^{1/2i\pi\lambda_1}/a^{\sigma_1}\, b^{\rho_1} \\ z_2\, e^{1/2i\pi\lambda_2}/a^{\sigma_2}\, b^{\rho_2} \end{matrix}\right|\begin{matrix} (1-\alpha;\, \lambda_1,\lambda_2)\, (1-\beta;\, \mu_1,\mu_2)\, (1-\gamma;\, \sigma_1,\sigma_1) \\ (1-\alpha-\beta;\, \lambda_1+\mu_1;\, \lambda_2+\mu_2)\, (1-\gamma-\delta;\, \sigma_1+\rho_1,\, \sigma_2+\rho_2) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} (1-\delta;\, \rho_1,\rho_2)\; P_1;\, P_2;\, P_3 \\ Q_1;\, Q_2;\, Q_3 \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

यह समाकलन, प्रमुख समाकलन के अन्तर्गत के अनुसार वैध है।

यदि (2.1) में $\sigma_1=\sigma_2=0$ रखें तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}\, (\sin\theta)^{\alpha-1}\, (\cos\theta)^{\beta-1}\, x^{\gamma-1}\, (1-x)^{\delta}\, [ax+b\,(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$$\times\, {}_2F_1\, [c,\, d : \alpha : ax/ax+b\,(1-x)]$$

$$H^{0,n\, :\, m_2,n_2;\, m_3,n_3}_{p_1,q_1\, :\, p_2,q_2;\, p_3,q_3}\left[\begin{matrix} z_1\, e^{i(\lambda_1+\mu_1)\theta}\, (\sin\theta)^{\lambda}\, (\cos\theta)^{\mu_1}\, (1-x)^{\rho_1} \\ z_2\, e^{i(\lambda_2+\mu_2)\theta}\, (\sin\theta)^{\lambda_2}\, (\cos\theta)^{\mu_2}\, (1-x)^{\rho_2} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} [ax+b\,(1-x)]^{-\rho_1} \\ [ax+b\,(1-x)]^{-\rho_2} \end{matrix}\right]d\theta\, dx$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\, e^{1/2i\pi\alpha}}{a^{\gamma}\, b^{\delta}}\; H^{0,n_1+4;\, m_2,n_2;\, m_3,n_3}_{p_1+4,q_1+3;\, p_2,q_2:\, p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1\, e^{1/2i\pi\lambda_1}/b^{\rho_1} \\ z_2\, e^{1/2i\pi\lambda_2}/b^{\rho_2} \end{matrix}\right|\begin{matrix} (1-\alpha;\, \lambda_1,\lambda_2)\, (1-\beta;\, \mu_1,\mu_2)\, (1-\delta;\, \rho_1\, .\, \rho_2) \\ (1-\alpha-\beta;\, \lambda_1,\lambda_2)\, (1-\gamma-\delta+c;\, \rho_1\, .\, \rho_2) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} (1-\gamma-\delta+c+d;\, \rho_1\, .\, \rho_2)\; P_1;\, P_2;\, P_3 \\ (1-\gamma-\delta+d;\, \rho_2\, .\, \rho_2)\; Q_1;\, Q_2;\, Q_3 \end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

यह समाकलन निम्नलिखित प्रतिबंध के अन्तर्गत वैध है। प्रतिबन्ध γ, δ, λ_1, μ_2, $\lambda_2\mu_1$, ρ_1, ρ_2 धनात्मक

वास्तविक राशियाँ हैं एवं उनमें से केवल σ_1 और σ_2 को छोड़कर सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं ।

$$Re\ (\alpha)>0,\ Re\ (\beta)>0,\ |\arg z_1|>\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|>\tfrac{1}{2}\pi v,$$

$$Re\ [(\alpha)+\lambda_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2} (d_j/\delta_j)+\lambda_2 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3} (f_j/E_j)]>0,$$

$$Re\ [(\beta)+\mu_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2} (d_j/\delta_j)+\mu_2 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3} (f_j/F_j)]>0,$$

$$Re\ [(\delta)+\rho_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2} (d_j/\delta_j)+\rho_2 \min_{1\leqslant j< m_3} (f_j/F_j)]>0,$$

a और b शून्येत्तर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b\ (1-x)]$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है ।

यदि प्रमुख समाकल (2.1) में $\lambda_1=\mu_2=\sigma_1=\rho_2=0$ रखें तो हमें एक रोचक परिणाम प्राप्त होगा ।

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}\ (\sin\theta)^{\alpha-1}\ (\cos\theta)^{-\beta 1}\ x^{\gamma-1}\ (1-x)^{\delta-1}\ [ax+b\ (1-x)]^{-\gamma-\delta}$$
$$\times\ {}_2F_1\ [c\ .\ d;\ \alpha\ .\ ax/ax+b\ (1-x)]$$

$$H^{0,n_1:\ m_2,n_2;\ m_3,n_3}_{p_1,q_1;p_2,q_3\ p_3,q_3} \left[\begin{matrix} z_1\ e^{i\mu_1\theta}\ (\cos\theta)^{\mu_1}\ (1-x)^{\rho_1}\ [ax+b\ (1-x)^{-\rho_1} \\ z_2\ e^{i\lambda_2\theta}\ (\sin\theta)^{\lambda_2}\ x^{\sigma_2}\ [ax+b\ (1-x)^{-\sigma_2} \end{matrix}\right] d\theta\ dx$$

$$=\frac{e^{1/2i\pi\alpha}}{a^{\gamma}\ b^{\delta}}\ H^{0,n_1+1;\ m_2,n_2+2;\ m_3,n_3+2}_{p_1+1,q_1+3;\ p_2+2,q_2;\ p_3+2\ .\ q_3}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1/b^{\rho_1} \\ z_2\ e^{1/2\pi\lambda_2}/a^{\sigma_2} \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} (1-\gamma-\delta+c+d;\ \rho_1,\sigma_2)\ P_1;\ (1-\beta;\ \mu_1) \\ (1-\alpha-\beta;\ \mu_1\lambda_2)\ 1-\gamma-\delta;\ \rho_1,\sigma_2) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} (1-\delta;\ \rho_1)\ P_2;\ (1-\alpha;\ \lambda_2)\ (1-\gamma,\sigma_2)\ P_3 \\ (1-\gamma-\delta+d;\ \rho_1,\sigma_2)\ Q_1;\ Q_2;\ Q_3 \end{matrix}\right]$$

यह समाकल निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है ।

प्रतिबन्ध

$\gamma,\ \delta,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \sigma_2,\ \rho_1$ धनात्मक वास्तविक राशियाँ हैं एवं उनमें से केवल $\lambda_1,\ \mu_2,\ \sigma_1\ \rho_2$ को छोड़ कर सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं ।

$$Re\ (\alpha)>0,\ Re\ (\beta)>0,\ |\arg z_1|>\tfrac{1}{2}u\pi\ |\arg z_2|>\tfrac{1}{2}v\pi$$

$$Re\ [(\alpha)+\lambda_2 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3} (f_j/F_j)]>0,$$

$$Re\,[(\beta)+\mu_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_2} (d_j/\delta_j)]>0,$$

$$Re\,[(\gamma)+\sigma_2 \quad \min \quad (d_j/\delta_j)]>0,$$

$$Re\,[(\delta)+\rho_1 \min_{1\leqslant j\leqslant m_3} (f_j/F_j)]>0$$

a और b शून्येतर अचर हैं। व्यंजक $[ax+b\,(1-x)]$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

कृतज्ञता ज्ञापन

सहाग्य एवं निर्देश के लिये लेखक डा० पी० अनन्दानी का आभारी है।

निर्देश

1. मेकराबर्ट, टी० एम०, Math. Ann. 1960-61, **142,** 450-452.
2. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, Indian Acad. Sci. 1972 **A75**, 117-123.
3. शर्मा, बी० एल०, Quar J. of Vikram University, 1965.
4. शान्ती, एस० सोनी, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1982, **25**, 183-87.
5. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा रेखा, पंडा, J. Reine. Angew. Math., 1976, **283,** 1284, 265-274.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 2, 1986

कैलोनिक्शन म्यूरीकेटुम के बीजों की जीवन अवधि का अध्ययन

एस ०एन० द्विवेदी

सिविल लाइन्स, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—दिसम्बर 28, 1985]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में **कैलोनिक्शन म्यूरीकेटुम** के बीजों की जीवन-अवधि ज्ञात की गई है। इसके बीजों की जीवन-अवधि ज्ञात करने के लिये 0 माह के बीज लिये गये। इसकी दो किस्मों-सफेद एवं काले बीज की जीवन अवधि क्रमशः 26 एवं 23 माह पायी गयी।

Abstract

Studies on viability in seeds of calonyction muricatum. *By* S. N. Dwivedi, 610/5 Civil Lines, Rewa (M. P.).

The present paper enumerates the viabilitiy in seeds of *Calonyction muricatum*. To study the viability of seeds, 0 month old seeds were taken. The viability of two varieties, viz., white and black seeds was 26 and 23 months respectively.

कैलोनिक्शन म्यूरीकेटुम कोनवालब्युलेसी कुल का एक सदस्य है। अब यह सदस्य विलुप्त हो रहा है। यह बरसात के दिनों में पाया जाता है। इसका पौधा वल्लरी होता है। इसके फूले हुये डंठल का उपयोग सब्जी के रूप में किया जाता हैं। इसकी सब्जी भूख को बढ़ाती है। इसकी दो किस्में—एक सफेद बीज वाली एवं दूसरी काले बीज वाली होती हैं। बीजों में मोटा बीजावरण होता है। फल कैप्सूलर होता है, जो लम्बवत् दीवार से फटता है। एक फल में सामान्यतया चार बीज होते हैं।

कैलोनिक्शन म्यूरीकेटुम की दोनों किस्मों के बीज 30-10-80 को एकत्र किये गये थे। इनको 0 माह पुराना माना गया। बीजों की जीवन अवधि ज्ञात करने के लिये 1-11-80 को दोनों किस्मों के 0 माह पुराने 10 स्वास्थ्य बीजों को पेट्री-डिश में अंकुरण के लिये रखा गया। यह प्रयोग 1.11.80 से प्रत्येक माह में दोहराया गया। प्रयोग 25.2.83 तक चालू रखा गया। इसके बाद उसे बन्द कर दिया गया, क्योंकि 25.2.83 के बीजों का अंकुरण नहीं होता। प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

कैलोनिक्शन म्यूरीकेटुम के बीजों की जीवन अवधि

आयु		सफेद बीज			काले बीज		
		GI	GS	GP	GI	GS	GP
मास	माह	दिन	दिन	(%)	दिन	दिन	(%)
नवम्बर 80	0	28	50	50	19	40	60
दिसम्बर 80	1	15	0	40	15	40	70
जनवरी 81	2	16	0	40	15	30	50
फरवरी 81	3	18	0	20	15	0	30
मार्च 81	4	20	0	20	14	0	20
अप्रैल 81	5	26	0	10	15	0	10
मई 81	6	25	0	10	15	0	10
जून 81	7	20	0	10	18	0	10
जुलाई 81	8	8	0	20	3	10	60
अगस्त 81	9	2	8	80	3	9	80
सितम्बर 81	10	3	0	80	4	10	50
अक्टूबर 81	11	2	4	90	2	4	70
नवम्बर 81	12	3	5	80	3	10	60
दिसम्बर 81	13	4	35	80	3	10	60
जनवरी 82	14	3	20	70	3	20	70
फरवरी 82	15	6	0	40	3	22	50
मार्च 82	16	4	0	40	3	0	40
लअप्रै 82	17	2	0	30	4	0	40
मई 82	18	4	0	10	5	0	10
जून 82	19	5	0	10	6	0	10
जुलाई 82	20	2	0	40	5	0	20
अगस्त 82	21	2	0	40	3	0	40
सितम्बर 82	22	3	6	70	3	0	22
अक्टूबर 82	23	3	5	60	3	0	10

GI=अंकुरण शुरूआत, GS=अंकुरण गति, GP=अंकुरण (%)

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 से विदित होता है कि सफेद किस्म के बीजों की अंकुरण शुरुआत 28 दिन तथा अंकुरण गति 50 दिन है। अगस्त, सितम्बर, अक्टूबर, नवम्बर, दिसम्बर एवं जनवरी में इस किस्म के बीजों की अच्छी अंकुरण गति देखी गई। काली किस्म के बीजों का अंकुरण (%), अंकुरण शुरूआत (दिन) तथा अंकुरण गति (दिन), इसी अवधि में सफेद किस्म से अच्छी पायी गयी। इस किस्म के ताजे इकट्ठे किये हुये बीजों की अंकुरण शुरूआत एवं अंकुरण गति क्रमशः 19 दिन एवं 40 दिन पायी गयी। मार्च, अप्रैल, मई एवं जून में अंकुरण बहुत कम होता है।

विभिन्न बीजों की अंकुरण अवधि का अध्ययन अन्य कार्यकर्ताओं द्वारा भी किया गया है[1–4]। यह अलग-अलग जातियों में परिवर्तित होती रहती हैं। **सोरिया रोबेस्टा** में यह कुछ दिन या कुछ दिन या कुछ सप्ताह तक की होती है। **एसरैक्केरियम** (जोन्स)[1] एवं **जिजानिया अक्वैटिका** (डुवेल)[2] के बीजों को यदि सूखी हवा में रख दिया जाय तो उनकी जीवन अवधि समाप्त हो जाती है। यह देखा गया है कि वनीय पौधों के बीजों की जीवन अवधि औसतन अच्छी होती है। यह बताया गया है [3,4] कि बड़े बीजावरण का जीवन अवधि में अच्छा योगदान है। ऐसे बीजों की जीवन-अवधि अधिक रहती है।

कैलोनिक्शन म्यूरीकेटुम एक जंगली पौधा है। इसके बीज में मोटा बीजावरण होता है। इसकी जीवन-अवधि अधिक होती है[5]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक शोधकार्य में परामर्श देने के लिये डॉ० हाकिम सिंह, सहायक-प्राध्यापक, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०) का अत्यन्त आभारी है।

निर्देश

1. जोन्स, जे० एल०, Bot. Gaz., 1920, **69**, 127-152.
2. डुवेल, जे०, U. S. Bur. Plant. Ind. Bull., 1905, 83.
3. मेबर, ए० एम० तथा पोलजाकोफ-मेबर, ए०, पर्गमान प्रेस, लन्दन, 1963.
4. बैक्यूरेल, पी०, C. R. Acad. Sci. Paris, 1934, **169**, 1662-1664.
5. द्विवेदी, एस० एन०, पी-एच० डी० थीसिस, ए ०पी० एस० यूनिवर्सिटी, रीवाँ, 1985.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 2, 1986

पराबैंगनी विकिरणों द्वारा मरक्यूरिक क्लोराइड के अपचयन में हाइड्रोजन परॉक्साइड का प्रभाव

जगदीश प्रसाद, सुरेश चन्द्र तथा संजय दत्त कौशिक

रसायन विभाग, मेरठ कालेज, मेरठ

[प्राप्त–दिसम्बर 28, 1983]

सारांश

0.1*M* H_2O_2 की सूक्ष्म मात्रा डालने से $HgCl_2$ की प्राप्ति में वृद्धि होती है। यह क्रिया प्रथमतः विकिरणों के द्वारा H_2O_2 के अपचयन के कारण होती है जो अपचयन प्रक्रमों को सुगम बना देता है।

Abstract

Influence of hydrogen peroxide in the reduction of mercuric chloride under ultraviolet radiations. *By* Jagdish Prashad, Suresh Chandra and Sanjay Dutt Kaushik, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Addition of small amounts of 0.1*M* H_2O_2 enhances the yield of $HgCl_2$ appreciably. This is primarily due to the decomposition of H_2O_2 under radiations facilitating the reduction processes.

ऐसा ज्ञात हुआ है कि विकिरणों द्वारा उत्पन्न H_2O_2 का $HgCl_2$ के अपचयन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता[1]। पराबैंगनी विकिरणों द्वारा $HgCl_2$ तथा $Na_2C_2O_4$ के अपचयन पर H_2O_2 के प्रभाव पर आँकड़े उपलब्ध नहीं हैं, अतः प्रस्तुत समस्या का अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

0.1*N* H_2O_2 विलयन (B. D. H.) के 2 मिली० को $HgCl_2+Na_2C_2O_4$ के विलयन के 100 मिली० के साथ मिलाकर पारद-वाष्प लैम्प से उत्पन्न पराबैंगनी विकिरणों से विभिन्न कालों तक प्रभावित किया गया। मानक KIO_3 विलयन के द्वारा अनुमापन करके उत्पन्न Hg^{2+} की मात्रा का परिमापन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में अंकित आंकड़ों से स्पष्ट है कि H_2O_2 की उपस्थिति अपचयन में अत्यधिक सहायक होती है तथापि, दीर्घकालीन उद्भासनों के बाद H_2O_2 का प्रभाव महत्वहीन हो जाता है।

सारणी 1

H_2O_2 की उपस्थिति में पराबैंगनी विकिरणों द्वारा

$HgCl_2 + Na_2C_2O_4$ विलयन का अपचयन

उद्भासन	उत्पन्न Hg_2Cl_2 (मिग्रा/100 मिली०)		
काल (मिनट)	क $= HgCl_2 + Na_2C_2O_2$	ख $= HgCl_2 + Na_2C_2O_4 + H_2O_2$	ग=ख–क
10	6.84	7.23	0.39
20	9.28	12.26	2.98
30	11.32	33.01	21.69
40	14.62	48.34	33.72
50	15.49	58.01	42.52
60	24.13	25.55	1.42
70	24.52	25.14	0.62

यह सर्वविदित है कि आयनीकारक विकिरणों द्वारा जलीय विलयन में H_2O_2 का अपघटन हो जाता है। दोनों—प्रकाश-रासायनिक तथा आयनीकारक विकिरणों के द्वारा उभयनिष्ठ OH तथा HO_2 का निर्माण होता है।

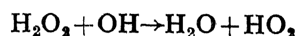
प्रकाश-रासायनिक अपघटन

पराबैंगनी क्षेत्र में प्रकाश-अवशोषण से सम्बन्धित प्रकाश-रासायनिक प्राथमिक क्रिया[2]



$$H_2O_2 + h\nu \rightarrow 2OH$$

है; जिसका अनुगमन करने वाली श्रृंखला अभिक्रियायें हैं

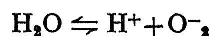


$$H_2O_2 + OH \rightarrow H_2O + HO_2$$



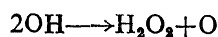
$$H_2O_2 + O^-_2 \rightarrow O_2 + OH^- + OH$$

एवं

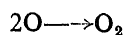


$$H_2O \rightleftharpoons H^+ + O^-_2$$

तथा शृंखला विच्छेदक

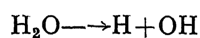


$$2OH \longrightarrow H_2O_2 + O$$



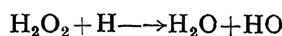
$$2O \longrightarrow O_2$$

विकिरणों द्वारा



$$H_2O \longrightarrow H + OH$$

तब, H परमाणुओं की अभिक्रिया से बनते हैं

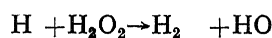


$$H_2O_2 + H \longrightarrow H_2O + HO$$

H_2O_2 के संयोग से अपचयन में यह वृद्धि, H_2O_2 के द्वारा निर्मित OH मूलकों की अपचायक क्रिया के कारण हो सकती है। हेसिस्की तथा लेफॉर्ट[3] का मत है कि OH मूलक न केवल ऑक्सीकरण के लिये कारण बनते हैं, वरन् अपचयन में भी सहायक होते हैं। यह प्रक्रिया (अ) सीधी ही या (आ) द्वितीयक अभिक्रिया में उत्पन्न परमाणुओं की उपस्थिति में हो सकती है।

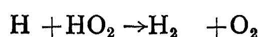
आणविक H_2 की निर्मिति

रिस्से[4] के अनुसार-एक्स-किरणों द्वारा H_2O_2 के अपघटन के साथ सूक्ष्म मात्रा में आणविक H का निर्माण होता है

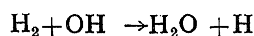


$$H + H_2O_2 \rightarrow H_2 + HO$$

तथा

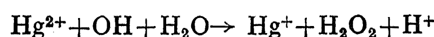


$$H + HO_2 \rightarrow H_2 + O_2$$

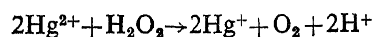


$$H_2 + OH \rightarrow H_2O + H$$

क्रिया की शृंखला निम्नवत् होने की कल्पना की जा सकती है[5]



$$Hg^{2+} + OH + H_2O \rightarrow Hg^{+} + H_2O_2 + H^{+}$$



$$2Hg^{2+} + H_2O_2 \rightarrow 2Hg^{+} + O_2 + 2H^{+}$$

इस प्रकार, (अ) अपचयन के साथ H_2 की बहुल मात्रा की निर्मिति के द्वारा, (आ) OH के द्वारा अपचयन जिसका अनुगमन विभव-पुनः ऑक्सीकरण करता है, अपचयन किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० पी० एस० राव (बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय) के अमूल्य सुझावों के लिये लेखक आभारी हैं।

निर्देश

1. क्रोस, एफ०, तथा वर्गे, के०, **जर्न० प्रै० केमि०**, 1933, **136**, 257.

2. यूरे, एच० सी०, डॉसे, एल० एच० तथा रिसे, एफ०, ओ०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1929, **51**, 1391.

3. हेर्सिस्की, एम० तथा लेफॉर्ट, एम०, **जर्न० किम० फिजि०**, 1951, **48**, 429.

4. रिसे, ओ०, **जैड० फिजिक० केमि०**, 1928, **A140**, 133.

5. इवांस, एम० जी० तथा यूरी, एन०, **नेचर**, 1950, **166**, 602.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 2, 1986

लाप्लास प्रसार द्वारा फलन का सन्निकटन

जी० एस० त्रिवेदी

गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अगस्त 5, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का लक्ष्य लाप्लास श्रेणी के आंशिक योगफल का वर्ग अनुमान प्राप्त करना है। इस प्रपत्र में तिवारी[4] के द्वारा स्थापित प्रमेय का सामान्यीकरण किया गया है।

Abstract

Approximation of a function by its Laplace expansion. *By* G. S. Trivedi, School of Studies in Mathematics, Vikram University, Ujjain.

The object of this paper is to obtain the order estimate of partial sum of Laplace series. Our result is a generalization of the theorem established by Tiwari[4].

1. माना कि $f(\theta, \phi)$, (θ, ϕ) का फलन है जहाँ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ एवं $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ और यह फलन गोले S की सतह पर (L) समाकलनीय है।

फलन $f(\theta, \phi)$ के संगत लाप्लास श्रेणी

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{1}{2\pi} \Sigma \left(n+\frac{1}{2}\right) \int\int_S P_n (\cos w)\, d\sigma' \tag{1}$$

जहाँ

$$\cos w = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')$$

और

$$d\sigma' = \sin\theta'\, d\theta'\, d\phi'$$

एवं लेजेन्ड्र बहुपदी $P_n(x)$ निम्नलिखित सम्बन्ध के द्वारा दर्शाया जाता है

$$(1-2t+t^2)^{-1/2}=\sum_0^\infty t^n P_n(x)$$

हम भी कागबेत्लियान्ज[5] के अनुसार ही फलन $f(\theta, \phi)$ के माध्य के व्यापक मान को निम्नानुसार परिभाषित करते हैं

$$f(w)=\frac{1}{2\pi \sin w}\int_{C_w} f(\theta', \phi')\, d\sigma'$$

जहाँ समाकलन छोटे वृत्त C_w के अनुदिश लिया गया है जिसका केन्द्र (θ, ϕ) गोले S पर है एवं जिसकी वक्रीय त्रिज्या w है ।

हम लिखेंगे,

$$F(w)=f(w)\,(\sin w)^{1/2-k}$$

और

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(P_n(x)+\frac{d}{dx}(P_{n+1}(x)\right)\right\}_{x=\cos w}= P_n'(\cos w)+P_{n+1}'(\cos w)$$

2. माना कि फलन $f(x)$, जो अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में लेबेस्क के अर्थ में समाकलनीय और आवर्त 2π के साथ आवर्ती है, साज ने[1] $f(x)$ की फूरियर श्रेणी के आंशिक योग के वर्ग अनुमान के सम्बन्ध में निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है ।

प्रमेय A

यदि

$$\int_0^h |f(t)|\, dt=0\left(h/\log \frac{1}{h}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } h\to 0$$

तो

$$\sum_{n=0}^{n} A_m \cos mt=0\,(\log \log n)$$

जहाँ

$$A_n=\left(\frac{1}{\pi}\right)\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

एवं

$$f(\cos\theta)\sim \sum_0^\infty a_v P_v(\cos\theta)$$

विल्सन ने[2] लेजेन्ड्र श्रेणी के आंशिक योग के वर्ग अनुमान का मान निकाला और निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया ।

प्रमेय B

यदि

$$\int_0^\pi f(\cos\theta)\,(\sin\theta)^{k+1/2}\,d\theta,\ 0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$$

तो

$$S_n(\cos\theta)=\sum_{v=0}^{n} a_v\,P_v(\cos\theta)=\begin{cases}0\,(n^k),\ (0\ k1/2)\\ 0(\log n),\ (k=0)\end{cases}$$

जहाँ

$$a_v=\frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^{1} f(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta)\,d\theta$$

ब्योहार ने[3] लेजेन्ड्रे श्रेणी के आंशिक योग के वर्ग अनुमान के सम्बन्ध में निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है ।

प्रमेय C

यदि अन्तराल (—1, 1) के किसी आन्तरिक बिन्दु x के लिये

$$\Phi(t)=\int_0^t |\phi(u)|\,du=0\left\{\frac{t}{(\log 1/t)^\alpha}\right\} \text{ ज्यों-ज्यों } t\to 0$$

तो

$$S_n(x)-f(x)=\begin{cases}0\,(\log n)^{1-\alpha},\ (0\leqslant\alpha\leqslant 1)\\ 0\,(\log\log n),\ \alpha=1)\end{cases}$$

जहाँ

$$\phi(u)=f(x+u)-f(x)$$

और $S_n(x)$, लेजेन्ड्रे श्रेणी $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$ का आंशिक योगफल है ।

तिवारी[4] ने लाप्लास श्रेणी के आंशिक योगफल के वर्ग सन्निकटन के सम्बन्ध में निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया ।

प्रमेय D

यदि

$$F(w)\in \text{lip}_*\,(\tfrac{1}{2}-k)$$

तो

$$S_n = \begin{cases} 0\,(n^k)\;(0<k<\tfrac{1}{2}) \\ 0\,(\log n)\;(k=0) \end{cases}$$

जहाँ S_n लाप्लास श्रेणी का आंशिक योगफल है।

प्रस्तुत प्रपत्र में तवारी के प्रमेय का सामान्यीकरण करते हुये निम्नलिखित प्रमेय स्थापित किया गया है।

प्रमेय

यदि, $F(w)$ इस प्रकार है कि,

$$F(w+t)-F(w)=O\left(t^{1/2-k}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

जहाँ $t>0,\ 0<k<\frac{1}{2}$ और $\lambda(t)$ बढ़ते क्रम हैं तो

$$S_n=O\,(\lambda\,(n))$$

यहाँ S_n लाप्लास श्रेणी (1) का आंशिक योगफल है।

3. प्रमेय की उत्पत्ति में हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

$$\left\{P_n'(\cos w)+P_n'(\cos w)\right\}=O\;(n^2)$$

प्रमेयिका 2

$$\left\{P_n'(\cos w)+P_{(1+n)}'(\cos w)\right\}.\sin w=O(n\sin w)$$

जहाँ $\pi-n^{-1}\leqslant w\leqslant\pi$.

प्रमेयिका 3

$$\left[P_n'(\cos w)+P_{n+1}'(\cos w)\right]\sin\,w$$

$$=\frac{-2}{\pi}\left[(n+1)\,e^{i\,l(n+1)}\,w+\frac{\pi}{4}\right]\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2}$$

$$.\left\{\frac{1}{2}\,(n+1)^{-1/2}+(n^{-3/2}\,(\sin w)^{-1})\right\}$$

$$+O\,(n^{-1/2}\,(\sin\,w)^{-1/2}$$

$$+O\,(n^{-1/2}\,(\sin\,w)^{-1/2}\,w^{-1})$$

$$+O\,(n^{-3/2}\,(\sin\,w)^{-3/2})$$

जहाँ पर $\alpha_n \leqslant w \leqslant \pi - n^{-1}$ एवं $\alpha_n \geqslant 1/n$

4. प्रमेय की उपपत्ति

समीकरण (1) द्वारा प्रदर्शित श्रेणी के n पदों का योगफल

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (k+\tfrac{1}{2}) \int_0^{\pi} f(w)\, p_k\,(\cos w)\sin w\; dw$$

हमें ज्ञात है कि

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, p_k\,(\cos w) = [P_n'\,(\cos w) + P_{n+1}'\,(\cos w)]$$

अत:

$$S_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(w)\;[P_n'\,(\cos w) + P_{n+1}'\,(\cos w)]\sin w\; dw$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\pi-1/n} + \int_{\pi-n-1}^{\pi}\right]$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \text{ माना}$$

सर्वप्रथम

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{1/n} F(w)\;[P_n'\,(\cos w) + P_{n+1}'\,(\cos w)]\;(\sin\,w)^{k+1/2}\, dw$$

प्रमेयिका 3 के प्रयोग से

$$I_1 = O\,(n^2\,\lambda\,(n))\int_0^{1/n} w\; dw$$

$$= O\,(\lambda(n))$$

अब

$$I_3 = \int_{\pi-n-1}^{\pi} F(w)\;[P_n'\,(\cos w) + P_{n+1}'\,(\cos w)]\;(\sin w)^{k+1/2}\; dw$$

$$= O\,(n)\int_0^{1/n} (\sin\,w)^{k+1/2}\, dw, \text{ [चूँकि } |F\,(w)| \text{ बन्धित है]}$$

$$=O\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right)$$

अन्त में

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}} F(w)\,[P_n'(\cos w)+P_{n+1}'(\cos w)]\,(\sin w)^{k+1/2}\,dw$$

प्रमेयिका 3 के प्रयोग से

$$I_2=-\frac{1}{2}R\left[\int_{1/n}^{\pi-1/n}(n+1)\,e^{i[(n+1)w+\pi/4]}\right.$$

$$.\;F(w)\,(\sin w)^{k-1/2}\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2}$$

$$.\;\left\{\left[\frac{1}{2}(n+1)^{-1/2}+O\left(n^{-3/2}(\sin w)^{-1}\right)\right]\right\}dw$$

$$+O(n^{-1/2})\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}} F(w)\,(\sin w)^{k-1}\,dw$$

$$+O(n^{-1/2})\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}} F(w)\,w^{-1}(\sin w)^{k-1}\,dw$$

$$+O(n^{-3/2})\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}} F(w)\,(\sin w)^{k-2}\,dw$$

$$=I_{2\cdot1}+I_{2\cdot2}+I_{2\cdot3}+I_{2\cdot4}+I_{2\cdot5}\ \text{माना}$$

अब

$$I_{2\cdot2}=O(n^{-1/2})\left[\int_{1/n}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi-1/n}\right]$$

$$=I_{2\cdot2\cdot1}+I_{2\cdot2},\ \text{माना}$$

$$I_{2\cdot2\cdot1}=O\int_{1/n}^{\pi/2} O\left(w^{1/2-k}(1/w)(w/2)^{-1/2}\,w^{k-3/2}\,dw\right.$$

$$=O\left(n^{-1/2}\lambda(n)\right)\int_{1/n}^{\pi/2}(w^{-3/2})\,dw$$

$$=O(\lambda(n))$$

अत:

$I_{2\cdot2}=O(\lambda(n))$, [चूंकि $I_{2\cdot2\cdot2}$ के अन्तर आने वाला समाकल बन्धित है]

$$I_{2\cdot3}=O\ (n^{-1/2})\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}} F(w)\ (\sin w)^{k-1}\ dw$$

$$=O\ (n^{-1/2})\left[\int_{1/n}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi-n^{-1}}\right]$$

$$=O\ (n^{-1/2})\ I_{2\cdot3\cdot1}+O\ (n^{-1/2})\ I_{2\cdot3\cdot2}$$

$I_{2\cdot3\cdot2}$ बन्धित है और

$$O\ (n^{-3/2})\ I_{2\cdot3\cdot1}=O\ (n^{-1/2})\ \int_{1/n}^{\pi/2} F(w)\ (\sin w)^{k-1}\ dw$$

$$=O\ (n^{-1/2}\ \lambda\ (n))\int_{1/n}^{\pi/2} w^{-1/2}\ dw$$

$$=O\left(\frac{\lambda\ (n)}{n}\right)$$

यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$I_{2\cdot4}=O\ (\lambda\ (n))$$

$$I_{2\cdot5}=O\ (n^{-3/2})\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}} F(w)\ (\sin w)^{k-2}\ dw$$

$$=O\ (n^{-3/2})\left[\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}}+\int_{\pi/2}^{\pi-n^{-1}}\right]$$

$$=I_{2\cdot5\cdot1}+I_{2\cdot5\cdot2}$$

$I_{1\cdot5\cdot2}$ बन्धित है, और

$$I_{2\cdot5\cdot1}=O\left(\frac{\lambda\ (n)}{n}\right)$$

अन्त में

$$I_{2\cdot1}=R\ \left[\frac{-1}{\pi}\ e^{i\pi/4}\ (n+1)^{1/2}\right.$$

$$\left.\int_{1/n}^{\pi-1/n} e^{i(n+1)w}\ .\ F\ (w)\left(\cot\ \frac{w}{2}\right)^{1/2}\ (\sin w)^{k-1/2}\ dw\right]$$

हम जानते हैं कि

$$(n+1)^{1/2}\ \int_{1/n}^{\pi-1/n} e^{i(n+1)w}\ F\ (w)\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2}\ (\sin w)^{k-1/2}\ dw$$

$$=\tfrac{1}{2}\ (n+1)^{1/2}\ \left[\int_{1/n}^{\pi-n^{-1}} e^{i(n+1)w}\ F\ (w)\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2}\ (\sin w)^{k-1/2}\ dw.\right.$$

$$-\int_{1/n-\mu_n}^{\pi-\mu_n n^{-1}} |e^{i(n+1)w} F(w+u_n)\left(\cot\left(\frac{w+\mu_n}{2}\right)\right)^{1/2}$$

$$(\sin(w+\mu_n))^{k-1/2}\, dw| \left[\mu_n = \frac{\pi}{n+1}\right]$$

उपर्युक्त का धनात्मक मान निम्नलिखित से छोटा होगा

$$\frac{1}{2}(J_1+J_2+J_3+J_4)$$

जहाँ

$$J_1 = (n+1)^{1/2} \int_{1/n-\mu_n}^{1/n} |F(w+\mu_n)\left(\cot\left(\frac{w+\mu_n}{2}\right)\right)^{1/2} (\sin(w+\mu_n))^{k-1/2}|\, dw$$

$$J_2 = (n+1)^{1/2} \int_{\pi-n^{-1}-\mu_n}^{\pi-n^{-1}} F(w)\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2} (\sin w)^{k-1/2}|\, dw$$

$$J_3 = (n+1)^{1/2} \int_{1/n}^{\pi-n^{-1}-\mu_n} |F(w+\mu_n)-F(w)| \left(\cot\left(\frac{w+\mu_n}{n}\right)\right)^{1/2}$$

$$(\sin(w+\mu_n))^{k-1/2}\, dw$$

और

$$J_4 = (n+1)^{1/2} \int_{1/n}^{\pi-n^{-1}-\mu_n} |\cot\left(\frac{w+\mu_n}{n}\right)^{1/2} (\sin(w+\mu_n))^{k-1/2}$$

$$-\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2} (\sin w)^{k-1/2}|\; |F(w)|\, dw$$

अब

$$J_1 = O(n^{1/2}) \int_{1/n-\mu_n}^{1/n} \lambda\left(\frac{1}{w+\mu_n}\right)(w+\mu_n)^{1/2-k}\left(\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{-1/2} (w+\mu_n)^{k-1/2}\, dw$$

$$= O(n^{1/2}\lambda(n))\,[w^{1/2}]_{1/n}$$

$$= O(\lambda(n))$$

$$J_2 = O(n^{1/2}) \int_{\pi-n^{-1}-\mu_n}^{\pi-n^{-1}} |F(w)\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2} (\sin w)^{k-1/2}|\, dw$$

$$= O(n^{1/2}) \int_{n^{-1}+\mu_n}^{1/n} t^k\, dt$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right)$$

$$J_3 = (n+1)^{1/2} \int_{1/n}^{\pi - n^{-1} - \mu_n} |F(w+\mu_n) - F(w)| \left(\cot\left(\frac{w+\mu_n}{2}\right)\right)^{1/2} (\sin(w+\mu_n))^{k-1/2}\, dw$$

$$= O\,(n)^{1/2} (\mu_n)^{1/2-k} \lambda\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \int_{1/n}^{\pi} w^{k-1}\, dw$$

$$= O\left(\frac{n^{1/2}}{n^{1/2-k}} \lambda(n) \frac{1}{n^k}\right)$$

$$= O\,(\lambda(n))$$

अन्त में

$$J_4 = (n+1)^{1/2} \int_{1/n}^{\pi - n^{-1} - \mu_n} \left| \left(\cot\left(\frac{w+\mu_n}{2}\right)\right)^{1/2} (\sin(w+\mu_n))^{k-1/2} - \left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2} (\sin w)^{k-1/2} \right| |F(w)|\, dw$$

$$= O\,(n^{1/2}) \int_{1/n}^{\pi - n^{-1} - \mu_n} \left|\mu_n \frac{d}{dw}\left(\cot\frac{w}{2}\right)^{1/2} (\sin w)^{k-1/2}\right| |F(w)|\, dw$$

$$= O\,(n^{1/2}) \left[\int_{1/n}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi - n^{-1} - \mu}\right]$$

$$= J_{4\cdot 1} + J_{4\cdot 2}$$

यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$J_{4\cdot 1} = O\left(\frac{\lambda(n)}{n}\right),$$

इसलिये

$$J_4 = O\left(\frac{\lambda(n)}{n}\right)$$ [चूंकि $J_{4\cdot 2}$ बन्धित है]

उपर्युक्त परिणामों को एकत्र करने पर प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत शोध पत्र की तैयारी में डॉ० बी० के० ब्योहार के द्वारा दिये गये मार्ग-दर्शन के लिये लेखक हृदय से आभारी है।

निर्देश

1. साज, ओ०, Trans Am. Math Soc., 1940, **48**, 117-125.
2. विलसन, एम०, Proc. Lond. Math., Soc., 1923, (2) **21**, 389-400.
3. ब्योहार, वी० के०, I. J. Purr App. Math, 1980, **11** (1), 128-134.
4. तिवारी, एस०के०, पी० एच०-डी० थीसिस, विक्रम विश्वविद्यालय, 1969.
5. कागबेत्लियान्ज, J. de Maths, 1924, **9** (3), 107-187.
6. डुप्लेसियस, J. Lond. Math Soc. 1952, **27**, 337-252.
7. सानसोन, Orthogonal functions, अंग्रेजी संस्करण, न्यूयार्क, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 2, 1986

हाइपरज्यामितीय फलनों वाले कतिपय समाकल

वाई० एस० कुमारस्वामी तथा एस० एन० माथुर

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जून 14, 1985]

सारांश

इस प्रपत्र में आपरेशन कलन की एक प्रमेय की सहायता से विभिन्न आर्गुमेन्ट वाले हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफलों वाले कतिपय समाकलों का मूल्यांकन किया गया है।

Abstract

Some intergals involving Hypergeometric functions. *By* Y. S. Kumara Swamy and S. N. Mathur, Department of Mathematics, University of Jodhpur.

In this paper we evaluate some integrals involving products of hypergeometric functions of different arguments with the help of a theorem on operational calculus in [2].

लैप्लास रूपान्तर को

$$\phi\,(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}h\,(t)\,dt \tag{1}$$

के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है और $\phi\,(p) \doteq h\,(t)$ के रूप में अंकित किया जा सकता है।

इस प्रसंग में निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी :—

हम जानते हैं कि

$$W_{k,u}\,(z)=\sum_{u,-u}\frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-u)}\,M_{k,u}\,(z) \tag{2}$$

जहाँ संकेत $\sum\limits_{u,-u}$ सूचित करता है कि इसके आगे के व्यंजक में u को $-u$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाना

है और दोनों व्यंजनों को जोड़ा जाना है ।

गोल्डस्टाइन[2] ने आपरेशनल कलन की पार्सेवाल प्रमेय का निम्नलिखित रूप में फिर से प्रकथन किया है ।

यदि $\phi(p) \doteq h(t)$ तथा $\psi(p) \doteq g(t)$

तो

$$\int_0^\infty \phi(t)\, g(t)\, t^{-1}\, dt = \int_0^\infty h(t)\, \psi(t)\, t^{-1}\, dt \tag{3}$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हों ।

अन्ततः, यदि

$$|\arg a| < \pi,\ |\arg b| < \pi,\ R(k+\lambda) < 1,$$

तो [1, p. 213, eq. 8]

$$t^{-k-\lambda}(2a+t)^{k-u-1/2}(2b+t)^{\lambda-u-1/2} F\left[\tfrac{1}{2}-k+u,\ \tfrac{1}{2}-\lambda+u;\ 1-k-\lambda;\ \frac{t(2a+2b+t)}{(2a+t)(2b+t)}\right]$$

$$\doteq \Gamma(1-k-\lambda)(4ab)^{-u-1/2} \exp\left\{(a+b)p\right\} W_{k,u}(2ap)\, W_{\lambda,u}(2bp) \tag{4}$$

प्रमेय

यदि $\phi(p) \doteq h(t)$ तथा

$$\psi(p, a, b) \doteq \frac{1}{t} W_{k,u}(2at)\, W_{\lambda,u}(2bt)\, h(t)$$

तो

$$\psi(p, a, b) = \frac{2p\,(ab)^{u+1/2}}{(1-k-\lambda)} \int_0^\infty t^{-k-\lambda}(p+a+b+2t)^{-1}$$

$$\cdot\, \phi(p+a+b+2t)(a+t)^{k-u-1/2}(b+t)^{\lambda-u-1/2}$$

$$\cdot\, F\left[\tfrac{1}{2}-k+u,\ \tfrac{1}{2}-\lambda-u;\ 1-k-\lambda;\ \frac{t(a+b+t)}{(a+t)(b+t)}\right] dt \tag{5}$$

बशर्ते कि $h(t)$ तथा $\phi(a+b+p+2t)$ का सम्बन्ध $L(0, \infty)$ से हो,

$R\,(k+\lambda) < 1,\ R\,(p+a+b) >$ तथा $h\,(t)$ a एवं b से स्वतन्त्र हों।

उपपत्ति

चूँकि $\phi(p) \doteqdot h\,(t)$ अतएव हमें

$$p\,\phi\,(p+a+b+c)/(a+b+c+p) \doteqdot \exp\{-(a+b+c)\,t\}\,h\,(t) \tag{6}$$

प्राप्त होता है।

अब (4) तथा (6) में (3) का सम्प्रयोग करने तथा c के स्थान पर p रखने पर हमें फल की प्राप्ति होती है।

उपप्रमेय

जब $k=\lambda=0$ तो सम्बन्ध की दृष्टि से प्रमेय निम्नलिखित में समानीत हो जाती है।

यदि $\phi\,(p) \doteqdot h\,(t)$ तथा

$$\psi\,(p,\,a,\,b) \doteqdot k_u\,(at)\,k_u\,(bt)\,h\,(t)$$

तो

$$\psi\,(p,\,a,\,b) = \pi p\,(ab)^{u/2-1/4} \int_0^\infty \Big\{(a+t)(b+t)\Big\}^{-u/2-1/4}$$

$$.\,(p+a+b+2t)^{-1}\,\phi\,(p+a+b+2t)\,P_{u-1/2}\left[\frac{2(a+t)\,(b+t)}{ab}-1\right]dt \tag{7}$$

बशर्ते कि $h\,(t)$ तथा $\phi\,(a+b+p+2t)$ का सम्बन्ध $L\,(0,\,\infty)$ से हो, $R\,(p+a+b) > 0$ तथा $h\,(t)$ a एवं b से स्वतन्त्र हों।

सम्प्रयोग

उदाहरण 1

यदि हम |1, p. 216, Eq. 16| को लें

$$h\,(t) = t^\sigma\,W_{1,m}\,(2t)$$

$$\doteqdot \frac{p\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+\sigma+m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\sigma-m\right)}{2^{\sigma+1}(2+\sigma-1)}$$

$$. F\left(\frac{3}{2}+\sigma+m, \frac{3}{2}+\sigma-m; 2+\sigma-1; \frac{1}{2}(1-p)\right)=\phi(p)$$

जहाँ

$$R(p)>-1, R(\sigma\pm m)>-\frac{3}{2}$$

तो (2) तथा |1, p. 216, *Eq.* 14| से हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{t} W_{k,u}(2at) W_{\lambda,u}(2bt) h(t)$$

$$=t^{\sigma-1} W_{k,u}(2at) W_{\lambda,u}(2bt) W_{1,m}(2t)$$

$$=p \underset{u,-u}{W} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-u)} \underset{n,-u}{\Sigma} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-u)} \underset{m,-m}{\Sigma} \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-1-m)}$$

$$. (4ab)^{u+1/2} 2^{m+1/2} (p+a+b+1)^{-\sigma-2u-m-3/2}$$

$$. \Gamma\left(\sigma+m+2u+\frac{3}{2}\right) F_A \left[\begin{matrix}\sigma+m+2u+\frac{3}{2}; 1-k+u, \\ 2u+1, 2u+1, 2m+1,\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}-\lambda+u, \frac{1}{2}-1+m; \\ \frac{2a}{p+a+b+1}, \frac{2b}{p+a+b+1}, \frac{2}{p+a+b+1}\end{matrix}\right]$$

$$=\psi(p, a, b)$$

जहाँ

$$R\left(\sigma\pm m\pm 2u+\frac{3}{2}\right)>0, R(p+a+b+1)>0.$$

(5) का सम्प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि यदि

$$R(1-k-\lambda)>0, |\arg a|<\pi.$$

$$|\arg b|<\pi, R(p)>0, R\left(\sigma\pm m\pm 2u+\frac{3}{2}\right)>0.$$

तो

$$\int_0^\infty t^{-k-\lambda} (a+t)^{k-u-1/2} (b+t)^{\lambda-u-1/2}$$

$$. F\left[\frac{3}{2}+\sigma+u, \frac{3}{2}+\sigma-m, 2+\sigma-1; 1-p-t\right]$$

$$. F\left[\frac{1}{2}-k+u, \frac{1}{2}-\lambda+u; 1-k-\lambda; \frac{t(a+b+t)}{(t+a)(t+b)}\right] dt$$

$$= \frac{\Gamma(2+\sigma-1)\Gamma(1-k-1)}{(ab)^{u+1/2}\Gamma(\frac{3}{2}+\sigma\pm m)} \sum_{u,-u} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-u)}$$

$$. \sum_{u,-u} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-u)} \sum_{m,-m} \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-1-m)} (ab)^{u+1/2}$$

$$. p^{-\sigma-2u-m-3/2} \Gamma\left(\sigma+m+2u+\frac{3}{2}\right)$$

$$. F_A \begin{bmatrix} \sigma+2u+m+\frac{3}{2}; \frac{1}{2}-k+u, \frac{1}{2}-\lambda+u, \frac{1}{2}-1+m; 2-u+1 \\ 2u+1, 21+1, \frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{1}{p} \end{bmatrix} \quad (8)$$

उदाहरण 2

माना कि |1, p. 215, Eq. 11|

$$h(t)=t^{v} M_{1,m}(2t) \doteq 2^{m+1/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+v+m\right)(1+p)^{-3/2-v-m}$$

$$. F\left[\frac{1}{2}+m+v, \frac{1}{2}-1+m; 2m+1; \frac{2}{1+p}\right] = \phi(p)$$

जहाँ

$$R\left(\frac{3}{2}+v+m\right)>0, \; R(p)>0$$

तो (2) तथा |1, p. 216, Eq. 14| से

$$\frac{1}{t} W_{k,u}(2at) W_{\lambda,u}(2bt) h(t)$$

$$= t^{v-1} W_{k,u}(2at) W_{\lambda,u}(2bt) M_{1,m}(2t)$$

$$\doteq \sum_{u,-u} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-u)} \sum_{u,-u} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-u)}$$

$$. (4ab)^{u+1/2} 2^{m+1/2} (p+a+b+1)^{-v-m-2u-3/2} \Gamma\left(v+2u+m+\frac{3}{2}\right)$$

$$\cdot F_A \left\{ \begin{matrix} v+2u+m+\frac{3}{2} \; ; \; \frac{1}{2}-k+u, \frac{1}{2}-\lambda+u, \frac{1}{2}-1+m; \\ 2u+1, \; 2u+1, \; 2m+1; \; \frac{2a}{p+a+b+1}, \frac{2b}{p+a+b+1}, \frac{2}{p+a+b+1} \end{matrix} \right\}$$

$$=\psi\,(p, a, b)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$R\,(v+m\pm 2u) > -\frac{3}{2}, \; R\,(p+a+b) > 1.$$

(5) से यह निकलता है कि यदि

$$R\,(1-k-\lambda) > 0, \; R\,(v+m\pm 2u) > -\frac{3}{2},$$

$$|\arg a| < \pi, \; |\arg b| < \pi, \; R\,(p) > 0,$$

तो

$$\int_0^\infty t^{-k-\lambda}\,(a+t)^{k-u-1/2}\,(b+t)^{\lambda-u-1/2}\,(p+t)^{-v-m-3/2}$$

$$\cdot F\left(m+v+\frac{1}{2}, \; m-1+\frac{1}{2}; \; 2m+1; \; \frac{1}{p+t} \right)$$

$$\cdot F\left[\frac{1}{2}-k+u, \frac{1}{2}-\lambda+u; \; (-k-\lambda); \; \frac{t\,(a+b+t)}{(t+a)\,(t+b)}\right] dt$$

$$= \frac{\Gamma(1-k-\lambda)}{\Gamma(\frac{3}{2}+v+m)\,(ab)^{u+1/2}} \sum_{u,-u} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-u)}$$

$$\cdot \sum_{u,-u} \frac{\Gamma(2-u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+u)} (ab)^{u+1/2}\, p^{-v-m-2u-3/2}\; \Gamma\left(v+m+2u+\frac{3}{2}\right)$$

$$\cdot F_A \left\{ \begin{matrix} v+m+2u+\frac{3}{2} \; ; \; 1-k-u, \frac{1}{2}-\lambda+u, \frac{1}{2}-1+m \\ 2u+1, \; 2u+1, \; 2m+1; \; \frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{1}{p} \end{matrix} \right\} \qquad (9)$$

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms, भाग I, मकग्राहिल न्यूयाक 1954.
2. गोल्डस्टाइन, एस०, प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1932, 34, (4) 103-125.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 2, 1986

कट्रोल शैलसमूह (ऊपरी जुरैसिक) में अन्तर्वेधित भित्तियों का शिलावीक्षण एवं शैल-जनन

अखिलेश्वर तिवारी एवं रमानाथ तिवारी

भौमिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—अक्टूबर 9, 1985]

सारांश

भुज (जिला कच्छ, गुजरात) से 15 कि० मी० दक्षिण-पूर्व में स्थित कट्रोल शैलसमूह को अन्तर्वेधित करती भित्तियों (डाइक्स) के शिलावीक्षण एवं शैल-जनन का अध्ययन प्रस्तुत शोध-पत्र में किया गया है। इन भित्तियों को उनके स्थूल तथा आन्तरिक संरचना एवं गठन के आधार पर मुख्यतः दो भागों, अल्पसिलिक तथा संकरित, में विभाजित किया जा सकता है। अल्पसिलिक भित्तियों में पिकराइट-बेसाल्ट एवं डोलेराइट तथा संकरित भित्तियों में विट्रिक टफ, लिथिक टफ एवं कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म प्रमुख हैं। अल्पसिलिक भित्तियों का निर्माण क्षारीय-ऑलिवीन बेसाल्ट तथा थोलेआइटिक द्रवीभूत शैलों (मैग्मा) से हुआ है जबकि संकरित भित्तियाँ अल्पसिलिक द्रवीभूत शैलों में अवसादी शैलों के समावेशन तथा पाचन द्वारा बनी हैं।

Abstract

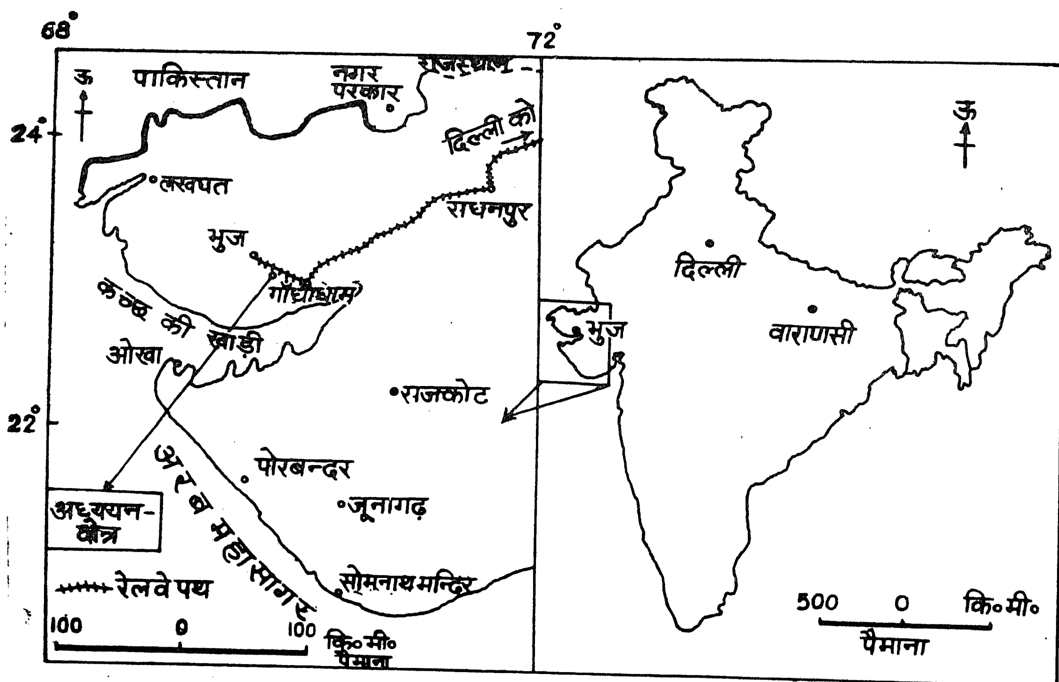
Petrography and petrogenesis of dykes, intruded in Katrol formation (Upper Jurassic). *By* Akhileshwar Tiwary and Rama Nath Tiwari, Department of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

Present paper deals with the petrographic and petrogenetic studies of dykes, occurring in the Katrol rocks (Upper Jurassic), 15 km SE of Bhuj, district Kutch, Gujarat. The area forms a part of Mesozoic Kutch basin, consisting of Chari, Katrol and Bhuj formations. Two types of dykes—basic and hybrid—are found intruding the sandstone and siltstone horizons of Katrol formation in the studied area. The basic dykes have generally NW-SE strike, 0.5m-16.0m width and maximum 300m length, whereas the hybrid dykes have NE-SW and NW-SE strike, 1.5cm-2.5m width and maximum 18m length. The basic dykes comprise mainly

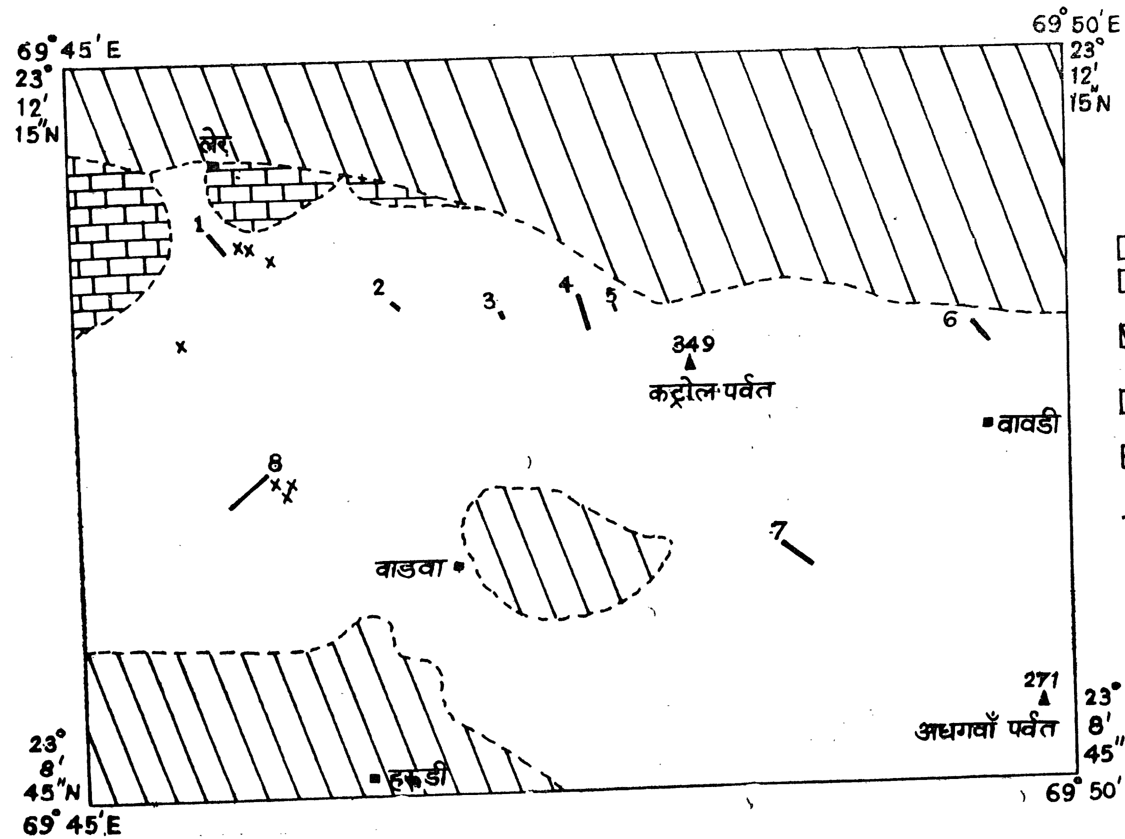
picritebasalt and dolerite whereas the hybrid dykes are constituted by vitric tuff, lithic tuff and carbonatite breccia.

The petrographic studies of the dykes of the present area reveal that alkaline-olivine-basalt magma and tholeitic magma took part in the formation of picrite-basalt and dolerite, whereas the hybrid dykes are result of pushing up, mobilisation and the partial fusion of the Pre-deccan trap sedimentary rocks (calcareous and ferruginous clastic rocks as well as non-clastic sediments) by the basaltic magma/hydrothermal solutions derived from the end stages of igneous activity in Kutch basin.

वर्तमान अध्ययन-क्षेत्र, भुज (जिला कच्छ, गुजरात) से 15 किमी० दक्षिण-पूर्व में लेर तथा वाडवा ग्रामों के निकट अक्षांश 23° 8′ 45″ उ०-23° 12′ 15″ उ० और देशांश 69° 45′ पू०-69° 50′ पू० के बीच स्थित है तथा 57 वर्ग कि० मी० क्षेत्र में फैला हुआ है (चित्र 1 एवं 2)। इस क्षेत्र में मेसोजोइक के मुख्यतः चारी, कट्रोल एवं भुज शैलसमूहों के अवसादी शैल दृश्यगत हैं लेकिन पहाड़ियों के ढलान एवं नालों में सब-रिसेंट शैल (मिलियोलाइट) भी यत्र-तत्र जमे दिखाई पड़ते हैं। अध्ययन-क्षेत्र के कट्रोल शैलों को अनेक भित्तियाँ अन्तर्वेधित करती हैं जिनका विस्तृत अध्ययन इस शोध-पत्र में किया गया है।



चित्र 1 अध्ययन क्षेत्र का स्थापना मानचित्र



चित्र 2 अध्ययन क्षेत्र के कट्रोल शैल समूह में भित्तियों का वितरण

कच्छ के शैलों को अन्तर्वेधित करती भित्तियों के अध्ययन में विश्वास[1], विश्वास एवं देशपाण्डेय[2] जेटली, करकरे एवं सिंह[3] तथा करकरे एवं अग्रवाल[4] के नाम उल्लेखनीय हैं। इन भूवैज्ञानिकों में, विश्वास तथा विश्वास एवं देशपाण्डेय ने भित्तियों के निर्माण तथा अवसादी शैलों एवं डकन-ट्रैप से उनके सम्बन्ध के बारे में अपने विचार व्यक्त किये हैं जबकि जेटली, करकरे एवं सिंह तथा करकरे एवं अग्रवाल ने काला डोंगर (पच्छम द्वीप) के बैजोसियन अवसादों से सम्बन्धित आग्नेय शैलों का शिलावीक्षण किया है। वर्तमान अध्ययन-क्षेत्र के कट्रोल शैलसमूह में अन्तर्वेधित भित्तियों का अभी तक अध्ययन नहीं किया गया है। प्रस्तुत शोध-पत्र में, इनके शिलावीक्षण एवं शैल-जनन से सम्बन्धित अध्ययन का विवेचन किया गया है।

क्षेत्रीय वितरण

वर्तमान अध्ययन-क्षेत्र के कट्रोल शैलों में अन्तर्वेधित भित्तियों को उनके स्थलीय तथा आन्तरिक गुणों एवं गठन के आधार पर मुख्यतः दो भागों, अल्पसिलिक तथा संकरित, में विभाजित किया गया है जिनका क्षेत्रीय वितरण निम्नवत् है।

(क) अल्पसिलिक भित्तियाँ

इस क्षेत्र में कट्रोल शैलसमूह के मुख्यतः बालुकाश्म एवं गादस्तर शैलों को बहुतायत जगहों पर अन्तर्वेधित करती अल्पसिलिक भित्तियाँ पायी जाती हैं (चित्र 2)। पहली भित्ति लेर ग्राम से 1 कि० मी० दक्षिण-पूर्व में वाडवा जाने वाली सड़क के दाहिने बगल बालुकाश्म एवं गादप्रस्तर को काटती हुई अधिकतम 3.5 मी० एवं न्यूनतम 15 सें०मी० मोटी एवं लगभग 200 मी० लम्बी दृष्टिगोचर है। इसका झुकाव 80°-85° दक्षिण की ओर तथा नतिलम्ब उ० प०-द० पू० दिशा है। इस भित्ति में नति एवं नतिलम्ब सन्धियाँ बहुत ही स्पष्ट हैं तथा सन्धियों एवं दरारों में बालू-युक्त पदार्थ भर गये हैं। कुछ स्थानों पर इस भित्ति एवं गाद प्रस्तर के बीच 1.5 मी० लम्बे जले हुये काले कार्बन युक्त बालुकाश्म शैली पदार्थ वर्तमान हैं।

दूसरी एवं तीसरी भित्तियाँ लेर से द० पू० में क्रमशः 2 कि० मी० एवं 3 कि० मी० की दूरी पर स्थित हैं। भित्ति-2 का नतिलम्ब उ० प०-द० पू० है मगर भित्ति-3 का नतिलम्ब उ० उ० प०-द० द० पू० है। ये दोनों भित्तियाँ बहुत छोटी हैं तथा 80° का झुकाव लिये हुये गादप्रस्तर शैल को अन्तर्वेधित करती हैं। दो अन्य भित्तियाँ (भित्ति-4 एवं 5) लेर से करीब 3.5 कि० मी० द० पू० में एक दूसरे से 250 मी० की दूरी पर सूक्ष्म एवं मध्यम कणीय बालुकाश्म को अन्तर्वेधित करती है। ये दोनों भित्तियाँ समान्तर हैं तथा इनका नतिलम्ब द० द० पू०-उ० उ० प० है। इनमें भित्ति-4 करीब 300 मी० लम्बी तथा 0.5 मी० से 9 मी० तक चौड़ी है। भित्ति-5 लगभग 45 मी० लम्बी एवं करीब 12 मी० से 15 मी० तक चौड़ी है। इन दोनों भित्तियों के आसपास छोटी-छोटी अन्य भित्तियाँ भी लगभग इनके समान्तर दृष्टिगोचर हैं।

छठी भित्ति कट्रोल पर्वत के पूरब में स्थित है तथा यह बालुकाश्म से गुजरती हुई उ० प०-द० पू० दिशा में नतिलम्ब हैं। इसकी लम्बाई लगभग 200 मी० तथा मोटाई 3 मी० है। सातवीं भित्ति वाठवा एवं वावडी ग्रामों को मिलाने वाली कच्ची रोड के उ० पू० में दृष्टिगोचर है जिसकी मोटाई लगभग 16 मी० है। यह गादप्रस्तर शैल को काटती हुई गुजरती है तथा इसका नतिलम्ब उ० प०-द० पू० तथा नति 70° द० प० दिशा में है। भित्ति-8 लेर ग्राम से 3 कि० मी० दक्षिण में तथा वाडवा ग्राम से उत्तर-पश्चिम में एक पहाड़ी पर उ० पू०-द० प० में नतिलम्बित है। यह पहाड़ी से नीचे की ओर दो भागों से विभक्त हो जाती है।

(ख) संकरित भित्तियाँ

वर्तमान अध्ययन क्षेत्र कट्रोल-शैलों (बालुकाश्म एवं गादप्रस्तर) को अन्तर्वेधित करती छोटी-छोटी संकरित भित्तियाँ भी विद्यमान हैं जो अपक्षय कारकों द्वारा अति प्रभावित मालूम पड़ती हैं (चित्र 2)। इनमें एक संकरित भित्ति, लेर ग्राम से 1 कि० मी० दक्षिण में तथा लेर चकार रोड के 300 मी० पूरब में स्थित है। यह उ० पू०-द० प० में नतिलम्बित है तथा लगभग 18 मी० लम्बी एवं 5 सें० मी० चौड़ी है। यह कहीं-कहीं दो भागों में विभक्त भी हो गई है। दूसरी भित्ति पहले वाली से पूरब में 10 मी० की दूरी पर उ० प०-द० प० दिशा में नतिलम्बित है तथा 9 मी० एवं 1.5 सें० मी० मोटी है। तीसरी भित्ति दूसरी भित्ति से पूरब में 100 मी० की दूरी पर नाले में स्थित है तथा 2.5 सें० मी० चौड़ी एवं 2-5मी० लम्बी है। यह उ० पू०-द० प० में नतिलम्बित है। चौथी संकरित भित्ति लेर ग्राम से 1.75 कि० मी० द० द० प० में दृष्टिगत है जो बालुकाश्म शैलों को अन्तर्वेधित करती है तथा 0.5 मी० चौड़ी है। अल्पसिलिक भित्ति-8 के नजदीक तीन अन्य संकरित भित्तियाँ दृष्टिगोचर हैं जो उत्तर-पश्चिम में 80° की नति रखती हैं तथा क्रमशः 1.25 मी०, 2.5 मी० एवं 0.80 मी० चौड़ी हैं। ये तीनों भित्तियाँ एक दूसरे के समान्तर हैं तथा 30 मी० के अन्दर ही वर्तमान हैं।

शिलावीक्षण

विभिन्न प्रकार की भित्तियों का विस्तृत शिलावीक्षण नीचे वर्णित है।

(क) अल्पसिलिक भित्तियाँ

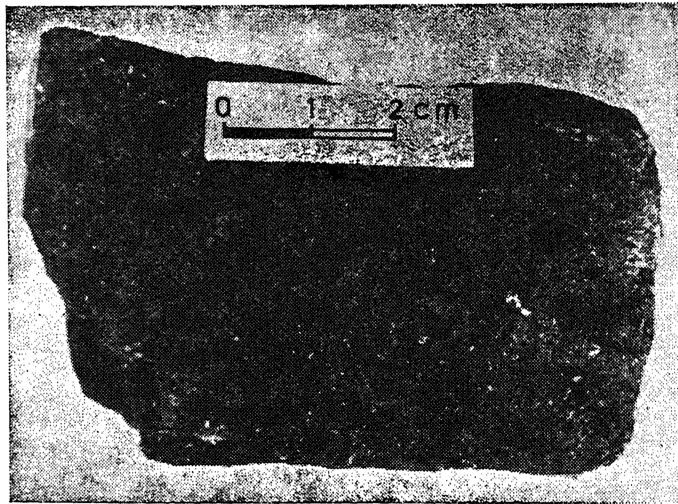
स्थूलीय और सूक्ष्मदर्शीय आधार पर अल्पसिलिक भितियाँ दो भागों में विभक्त की जा सकती हैं जिनका पूर्ण विवरण निम्नलिखित है।

(1) पिकराइट बेसाल्ट

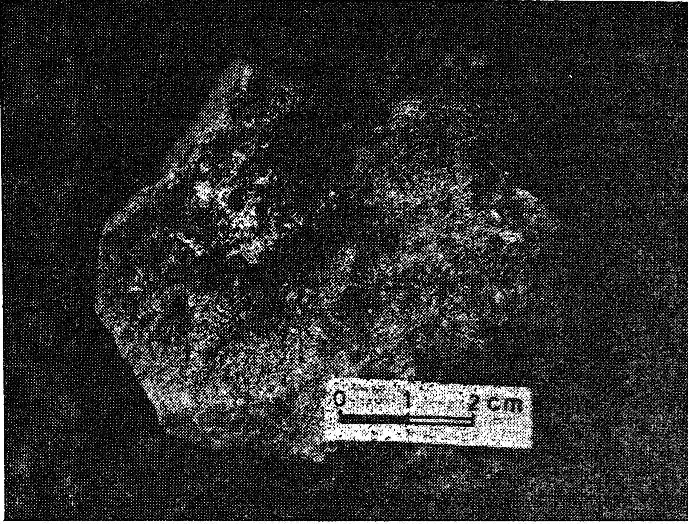
स्थूलतः पिकराइट-बेसाल्ट संपुंजित कठोर, संहत एवं श्यामवर्णी हैं तथा इनका आपेक्षिक घनत्व करीव 3 है। ये मुख्यतः स्फोटगर्ती हैं (चित्र 3)। इनके स्फोटगर्त सूक्ष्म से लेकर 3-4 मि० मी० व्यास



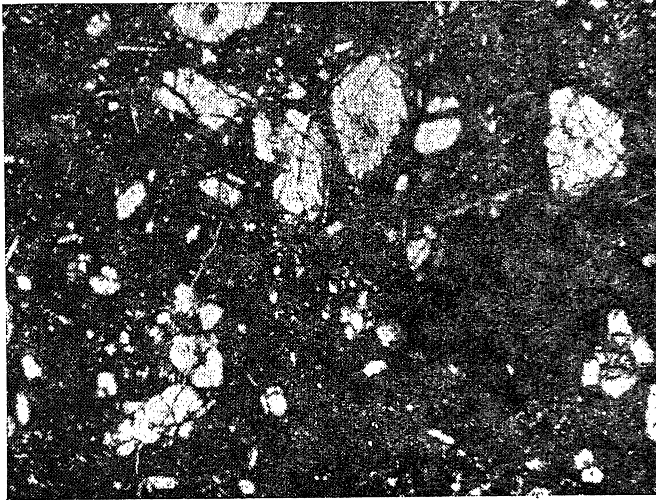
चित्र 3 पिकराइट-बेसाल्ट (S. No. 101/217) के चित्र में विभिन्न आकार-प्रकार के स्फोट-गर्त दृष्टिगोचर हैं ।



चित्र 4 चित्र में डोलेराइट (S. No. 100/389) सूक्ष्मकणीय, श्यामवर्णी एवं संपुंजित लक्षण दिखलाता है ।



चित्र 5 कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म के चित्र में (S. No. 101/102) संपुंजित तथा असमकणीक लक्षण प्रदर्शित है।



चित्र 6 पिकराइट-बेसाल्ट (S. No. 100/542) का चित्र-सूक्ष्मग्राफ दीर्घक्रिस्टल अन्तर्वेशी गठन प्रदर्शित करता है। लक्ष्य क्रिस्टल मुख्यतः पाइरॉक्सीन एवं ऑलिवीन के हैं। आधात्रिका का निर्माण पाइरॉक्सीन एवं प्लेजियोक्लेज के अतिसूक्ष्म कणों से हुआ है। चित्र में एक बड़े मैग्नेटाइट के कण में आधात्रिका का अन्तर्वेश भी दिखाई पड़ता है (सा० प्र०, ×80)



चित्र 7 पिकराइट-बेसाल्ट (S. No. 100/542) का चित्र-सूक्ष्मग्राफ, आधात्रिका में पाइरॉक्सीन का प्रिज्मीय क्रिस्टल प्रदर्शित करता है तथा दीर्घक्रिस्टल-अन्तर्वेश गठन भी दिखाई पड़ता है (सा० प्र०, ×800)

वाले हैं जो मुख्यतः उत्तरजात खनिजों-कैलासाइट, जियोलाइट, स्फटिक, ओपल क्लोराइट इत्यादि से भरे हैं मगर इनमें कुछ रिक्त भी हैं। सूक्ष्मदर्शी के बिना इनका खनिज अवयव मालूम करना कठिन है फिर भी शैल-नमूनों के सतहों पर दिखाई पड़ने वाले उजले तथा भूरे रंगों के धब्बे इनके फेलसिक लक्षण प्रदर्शित करते हैं।

पिकराइट-बेसाल्ट के सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन में यह ज्ञात होता है कि ये छोटे से बड़े कणों वाले असमकणिक पूर्णफलीय से अफलकीय कणोंयुक्त तथा पूर्णक्रिस्टली से अर्धक्रिस्टली शैल हैं तथा मुख्यतः अन्तराकणीक उपओफाइटी या पंजित) पॉर्फिरीय गठन वाले हैं लेकिन इनमें कुछ का गठन दीर्घक्रिस्टल अन्तर्वेशी हैं जिनमें अभिक्रिया-नेमि परिलक्षित हैं (चित्र 6 एवं 7)। लक्ष्य क्रिस्टल मुख्यतः ऑलिवीन, पाइरॉक्सीन तथा फेल्सपार के हैं। इनके मुख्य खनिज अवयव हैं—ऑलिवीन, प्लेजिओक्लेज एवं पाइरॉक्सीन तथा कुछ गौण खनिज-क्लोराइट, एपेटाइट, इडिंगसाइट, सेरिसाइट तथा लौह-ऑक्साइड। कुछ शैल-नमूनों में परिवर्तन करने वाली अभिक्रियायें तीव्र हैं जिनके कारण खनिज कणों की पहचान मुश्किल है।

वर्तमान अध्ययन-क्षेत्र के पिकराइट-बेसाल्ट में ऑलिवीन एक प्रमुख एवं प्रभावी खनिज है तथा इसके लक्ष्यक्रिस्टल प्रचुर मात्रा में उपलब्ध हैं। इसके सूक्ष्म-कण भी आधात्रिका निर्माण में अग्रणी हैं। दरारों तथा क्रिस्टल की बाहरी रेखा के समान्तर विलोप कोण की उपस्थिति से ये

अभिलक्षित हैं। रूपान्तरण की अभिक्रियायें क्रिस्टल के किनारों पर एवं दरारों के बीच अधिक प्रभावशाली हैं। लोहे के निर्मुक्त होने के कारण ये इडिंगसाइट में परिवर्तित हो गये हैं। कुछ कणों के अत्यधिक रूपान्तरण के कारण किरीट संरचना दिखलाई पड़ती है। पुनः रूपान्तरण के प्रभाव से कुछ इडिंगसाइट लिमोनाइट में परिवर्तित हो गये हैं। आधात्रिका भी ऑलिवीन के कुछ लक्ष्यक्रिस्टलों में प्रवेश कर गयी है तथा उसे खा गयी है।

प्लेजिओक्लेज (लेब्राडोराइट) भी पिकराइट-बेसाल्ट में एक प्रमुख खनिज हैं। लेब्राडोराइट के क्रिस्टल असमान एवं अनियमित आकार तथा पतली पट्टियों के समान हैं। इनका विलोप कोण 27½° से 39° है। बहुत ही सूक्ष्म एवं रूपान्तरित होने के कारण इनकी लैमिना स्पष्ट नहीं हैं तथा कुछ अनट्वीन्ड भी हैं। ये लक्ष्यक्रिस्टलों के रूप में बहुत ही कम हैं और इनके किसी-किसी कण का सेरिसाइट में रूपान्तरण हो गया है।

प्लेजियोक्लेज के बाद पाइरॉक्सीन एक प्रमुख खनिज है जो ऑगाइट द्वारा प्रस्तुत किया गया है। ऑगाइट के कण प्रिज्मीय हैं (चित्र 7) तथा इनका विलोप कोण 40°-45° है। इनके कुछ कण हॉर्नबलेन्ड में बदल गये हैं हॉर्नब्लेन्ड हरे रंग के हैं तथा इनका विलोप कोण 12°-30° है। हरे रंग के कुछ एइजिरिन-ऑगाइट के भी कण वर्तमान है जिनका विलोप कोण 17° हैं। ऑगाइट में कहीं-कहीं मैगनेटाइट का अन्तर्वेश भी दिखाई पड़ता है।

उपर्युक्त वर्णित प्रमुख खनिजों के अतिरिक्त कुछ गौण खनिज भी पिकाराइट-बेसाल्ट में वर्तमान. हैं जिनमें लौह ऑक्साइड प्रमुख है तथा ये पूरे शैल स्लाइड में प्रचुर मात्रा में वितरित नजर आते हैं। अधिकांशतः ये छोटे आकार के हैं मगर इनके बड़े-बड़े कण भी वर्तमान हैं। लौह-ऑक्साइड के प्रमुख खनिज हैं मैगनेटाइट। मैगनेटाइट के कुछ कण ऑगाइट का अन्तर्वेश भी रखते हैं। ये आधात्रिका में लगभग 40 प्रतिशत तक दिखाये पड़ते हैं। लौह ऑक्साइड तथा प्रमुख खनिजों के रूपान्तरण से निर्मित खनिजों के अलावा एपेटाइट, क्लोराइट इत्यादि खनिज भी बहुत ही अल्प प्रतिशत मात्रा में दिखाई पड़ते हैं।

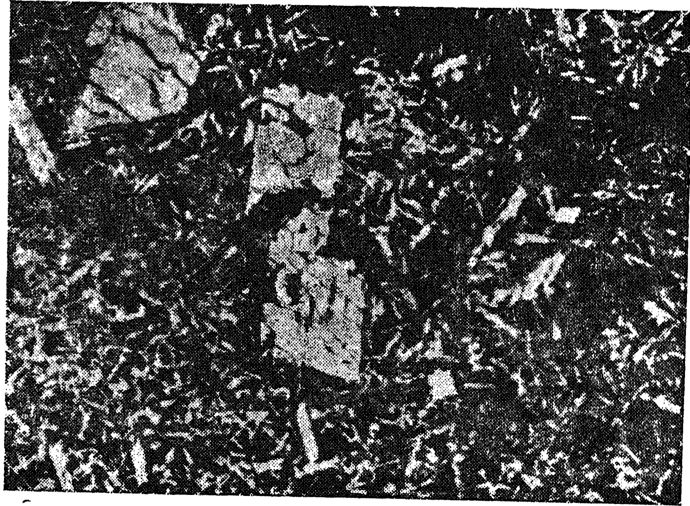
(2) डोलेराइट

वर्तमान अध्ययन क्षेत्र में विगोपित डोलेराइट. स्थूलतः अरूपान्तरित संपुंजित, कठोर, संहत, सूक्ष्म से मध्य-कण वाले तथा समकणिक हैं। ये श्यामवर्णी हैं तथा इनका रंग भूरा काला है (चित्र 4)। कुछ शैल-नमूने अपक्षय क्रियाओं के प्रभाव के कारण नीललोहित वर्ण के हो गये हैं। इनका आपेक्षिक घनत्व लगभग 3 है तथा इनके ऊपरी सतह पर दिखाने आले उजले सूक्ष्म कण फेल्सपार के मालूम पड़ते हैं। पिकाराइट-बेसाल्ट के समान ये स्फोटगर्ती नहीं हैं।

सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन से यह ज्ञात होरा है कि डोलेराइट सूक्ष्म से मध्य-कणी, पूर्णक्रिस्टली, समकणिक और अंशफलकीय से अफलकीय हैं। ये ओफाइटी से उपओफाइटी गठन दिखलाते हैं जिनमें प्लेजियोक्लेज के सपाट या प्रिज्मीय कण आंशिक या पूर्णरूपेण पाइरॉक्सीन में परिबद्ध हैं (चित्र 8)। कुछ शैल-नमूनों



चित्र 8 डोलेराइट (S. No. 100/388) के चित्र-सूक्ष्मग्राफ ओफाइटी एवं उपओफाइटी गठन प्रदर्शित करता है तथा इसमें लेब्राडोराइट की पट्टियाँ ऑगाइट में अन्तर्वेधी दिखाई दे रही हैं (सा० प्र०, ×80)



चित्र 9 अपक्षय क्रियाओं से प्रभावित डोलेराइट (S. No. 101/205) का चित्र-सूक्ष्मग्राफ । इसमें लेब्राडोराइट एवं आगाइट के विभाजित कण दिखलाई दे रहे हैं (सा० प्र०, ×80)

में अन्तराकणिक गठन भी उपस्थित है। अपक्षय क्रियाओं से बहुत ही प्रभावित डोलेराइटों में प्लेजियोक्लेज के कुछ ही कण स्पष्ट नजर आते हैं (चित्र 9) तथा इस अवस्था में अन्य खनिजों का पहचान कठिन है। डोलेराइटों के प्रमुख खनिज अवयव है-प्लेजियोक्लेज, पाइरॉक्सीन, और कुछ गौण खनिज-इल्मेनाइट, मैगनेटाइट।

(3) जियोलाइट

प्लेजियोक्लेज का प्रतिनिधित्व लेब्राडोराइट द्वारा किया गया है। ये सपाट या पतली पट्टियों के आकार के हैं तथा एक ही दिशा में दीर्घित हैं। इनमें पटलित यमलन स्पष्ट है तथा इनका विलोप-कोण से 7° से 35° तक है। इनमें यमलन कार्ल्सबाड या अलबाइट नियमों के अन्तर्गत हुआ है। पेरिक्लाइन यमलन बहुत ही अल्प है। इनकी क्रिस्टल सीमा रेखा अधिकांशतः स्पष्ट है लेकिन कुछ अस्पष्ट भी हैं। कुछ लेब्राडोराइट के विदलन-तलों में लौह-ऑक्साइड के कण समाहित हो गये हैं।

पाइरॉक्सीन का ऑगाइट द्वारा प्रतिनिधित्व है। साधारण प्रकाश में, इनके कण पीले या हल्के हरे रंग के सूक्ष्मदर्शी में दृष्टिगोचर हैं। ये अधिकांशतः समकणीक, प्रिज्मीय एवं स्पष्ट विदलन-तल रखते हैं। क्रास्ड-निकॉल्स में ये हरे, नीललोहित तथा पीले हरे रंग के दिखाई पड़ते हैं तथा इनका विलोप कोण 44° है। ये फेल्सपार से निविष्टकाँची सम्बन्ध प्रदर्शित करते हैं तथा ओफाइटी एवं उपओफाइटी गठन दिखलाते हैं। इनके कुछ कण फेरो-ऑगाइट या टाइटैनियम युक्त आगॉइट है तया रॉड के समान लौह या टाइटैनियम खनिज रखते हैं। ऑगाइट के कुछ कण हार्नब्लेन्ड में बदल गये हैं जो कि हरे रंग के हैं तथा 18° विलोप कोण रखते हैं। कुछ ऑगाइट के कणों से लौह का निक्षालन के स्पष्ट हैं। ऑगाइट के अलावा पिजियोनाइट के भी रंगहीन कण वर्तमान हैं जिनका विलोप कोण 42° है तथा ये भी हॉर्नब्लेन्ड में रूपान्तरित होते नजर आते हैं।

उपर्युक्त वर्णित प्रमुख खनिजों के अतिरिक्त कुछ उपखनिज भी वर्तमान हैं जिनमें इलमेनाइट प्रमुख है। जियोलाइट, मैगनेटाइट इत्यादि भी अत्यल्प मात्रा में उपस्थित हैं।

(ख) संकरित भित्तियाँ

संकरित भित्तियों को उनके अवयव खनिजों एवं शैल-खण्डों के आधार पर तीन भागों-कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म, लिथिक टफ तथा विट्रिक टफ में विभक्त किया जा सकता है जिनका पूर्ण विवरण निम्नलिखित है।

(1) कार्बोनेटाइट संकोणाश्म

वर्तमान अध्ययन क्षेत्र के कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म स्थूलतः संपुंजित, नीललोहित, अपक्षय क्रियाओं से प्रभावित एवं कैल्सियमी है (चित्र 5)। सूक्ष्मदर्शी में, ये असमकणिक तथा स्थूलकणी हैं एवं मुख्यतः

कैल्साइट,स्फटिक, फेल्सपार काँच, लौह् ऑक्साइड तथा कुछ कोणीय शैल-खण्डों से निर्मित हैं (चित्र 10)। सभी अवयवों में कैल्साइट की प्रतिशत मात्रा अधिक है तथा इसके विदलन-तल स्पष्ट हैं।



चित्र 10 कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म (S. No. 101/102) के चित्र-सूक्ष्मग्राफ में क्रिस्टलीय कैल्साइट (दाहिनी ओर) और कैल्साइट, लौह्-ऑक्साइड तथा स्फटिक का समिश्रण (बाईं ओर) दिखाई दे रहा है (क्रॉ० नि०, ×80)

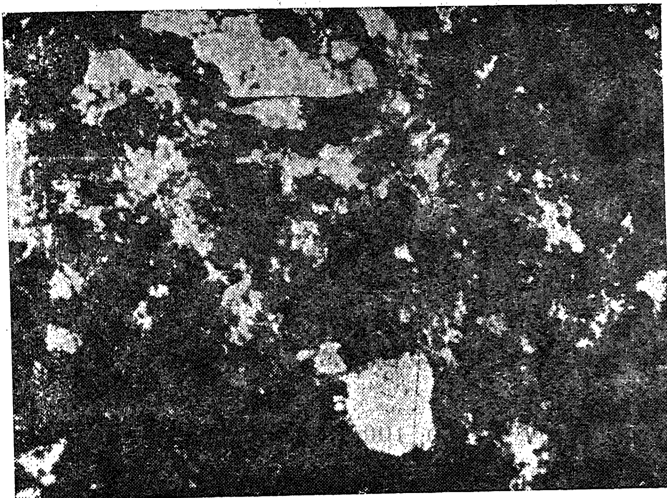
अपर क्रिस्टलों में दीर्घित एवं अनियमित आकार के स्फटिक अधिक हैं। कुछ स्थलों पर ये लौह् ऑक्साइड के साथ परस्पर मिश्रित हैं तथा कैल्साइट एवं लौह्मय पदार्थों से संयोजित हैं। इनमें फेल्सपार का केवोलिनाइट में रूपान्तरण स्पष्ट दृष्टिगोचर है।

शैल-खण्डों में, बेसाल्ट तथा स्फटिक-अभ्रक युक्त रूपान्तरित शैल प्रमुख हैं। बेसाल्ट के टुकड़े अधिकांशतः 2 मि० मी० व्यास के हैं तथा उनके स्फोटगर्त या गुहिकाओं में जियोलाइट तथा कैल्साइट भरे हैं। मगर कुछ स्फोटगर्त रिक्त भी हैं। काँच भी मैट्रिक्स में उपस्थित है तथा क्रॉस्ड-निकॉल्स में यह पूर्ण विलोप हो जाता है। लौह् ऑक्साइड़ में लिमोनाइट तथा हेमाटाइट खनिज प्रमुख हैं।

(2) लिथिक टफ

लिथिक टफ को विभिन्न अवयवों की उपस्थिति के आधार पर दो भागों-कैल्सियम-सिलिकामय लिथिक टफ तथा कैल्सियम लिथिक टफ में विभाजित किया जा सकता है। कैल्सियमी-सिलिकामय चूना-पत्थर या इन दोनों के स्वांगीकरण से बने हैं। स्थूलतः ये छोटे कण वाले, भरभरे, संपुंजित तथा

लिथिक टफ मुख्यतः चूनामय-बालुकाश्म या सिलिकामय चूनामय हैं। कैल्सियमी लिथिक टफ कैल्साइट तथा लौह आॅक्साड के मिश्रण हैं। ये छोटे कण वाले भरभरे, गुलाबी या पीला कर्ण युक्त, अत्यधिक चूनामय तथा अपक्षय क्रियाओं से प्रभावित हैं।

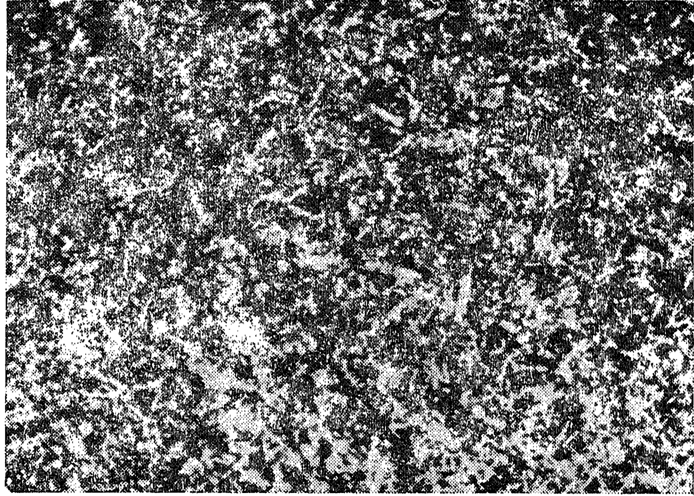


चित्र 11 लिथिक टफ (S. No. 100/474) का चित्र-सूक्ष्मग्राफ कैल्साइट एवं स्फटिक का अनियमित रूप से वितरण प्रदर्शित करता है। (सा० प्र०, ×80)

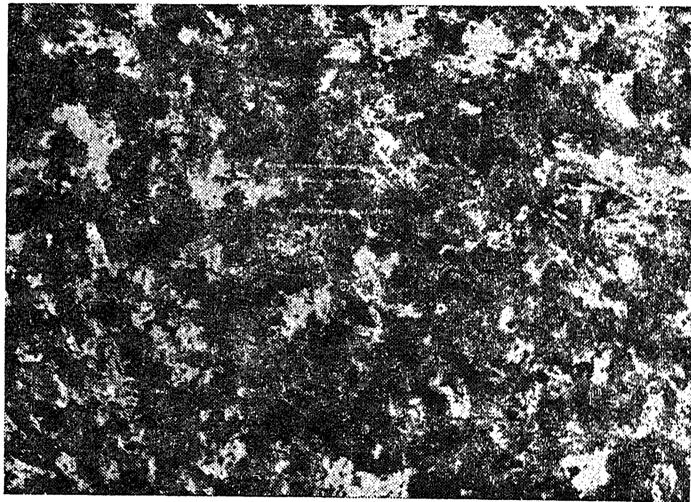
सूक्ष्मदर्शी में लिथिक टफ समकणीक हैं तथा अर्ध-गोलीय या कणीय खनिजों तथा शैल-खण्डों से बने हैं। इनके प्रमुख अवयव खनिज हैं—स्फटिक, अभ्रक, फेल्सपार, कैल्साइट तथा लौह-आॅक्साइड (चित्र 11)। स्फटिक के छोटे तथा अर्ध-गोलकीय कण चूनामय तथा लौहमय संयोग से आबद्ध हैं। फेल्सपार में सैनिडीन, माइक्रोक्लीन तथा प्लेजियोक्लेज (लेब्राडोराइट) प्रमुख हैं। कुछ बायोटाइट के कण भी वर्तमान है जो कि 1 मि० मी० तक लम्बे हैं। लौह आॅक्साइड में हेमाटाइट एवं लिमोनाइट प्रमुख हैं। कैल्साइट एवं लोह-आॅक्साइड एकसाथ मिलकर संयोजन का कार्य करते हैं। कुछ शैल-नमूनों (S. No. 100/386) के विभिन्न भागों में अलग-अलग गठन है। अगर इसके एक भाग में चूनामय बालुकाश्म की उपस्थित है तो दूसरे भाग में लौह-आॅक्साइड या कैल्साइट या दोनों का मिश्रण है।

(3.) विट्रिक टफ

विट्रिक टफ सूक्ष्मक्रिस्टली काँचीय टफ है तथा सूक्ष्म, भूरे रंग में चूनामय मैट्रिक्स एवं सिलिकेट काँचों से निर्मित है। काँच के शीर्ण-तन्तु की बहुलता इनकी विशेषता है। ये कठोर, संहत, पीले या गुलाबी वर्ण वाले सूक्ष्मकणीय तथा समकणीय हैं। इनके प्रमुख अवयव हैं—काँच, फेल्सपार तथा बेसाल्ट के शैल-खण्ड (चित्र 12-13)। काँच के शीर्ण-तन्तु तथा बेसाल्ट के टुकड़े औसतन 0.3 मि० मी० लम्बे



चित्र 12 विट्रिक टफ (S. No. 100/387) के चित्र-सूक्ष्मग्राफ में काँचीय शीर्ण-तन्तु दिखाई दे रहे हैं (सा० प्र०, ×80)



चित्र 13 विट्रिक टफ (S. No. 100/383) के चित्र-सूक्ष्मग्राफ में काँच एवं कुछ अल्पसिलिक पदार्थों का समिश्रण दृष्टिगोचर है।
(सा० प्र०, ×310)

हैं। आधात्रिका मुख्यतः सूच्याकार फेल्सपार, पाइरॉक्सीन, लौह-ऑक्साइड तथा काँचीय पदार्थों से निर्मित है।

शैल-जनन

अध्ययन-क्षेत्र में भित्तियों से सम्बन्धित प्राप्त तथ्यों तथा शिलावीक्षण के आधार पर इनके शैल-जनन के बारे में निम्नलिखित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

(क) अल्पसिलिक भित्तियों का शैल-जनन

पिकाराइट-बेसाल्ट में ऑलिवीन के लक्ष्यक्रिस्टल सबसे अधिक हैं। ऑलिवीन अधिकांशत द्रवभूत-शैलों (मैग्मा) के ठंडे होने की प्राथमिक अवस्था में लक्ष्यक्रिस्टल के रूप में बने हैं इसलिये आधात्रिका में ये अनुपस्थित हैं। इन शैलों में ऑलिवीन की सीमारेखा इडिंगसाइट में परिवर्तित हो गई है। अतः इससे निर्मित किरीट संरचनायें, अभिक्रिया का होना प्रदर्शित करती हैं। चूँकि ऑलिवीन क्रिस्टल प्रारम्भिक अवस्था में ही निर्मित हो जाता है इसलिये यह अपने चारों तरफ के द्रवीभूत-शैलों (मैग्मा) से अभिक्रिया करता है। ऑलिवीन एवं पाइरॉक्सीन सिरीज में लगातार अभिक्रियायें बचे हुये द्रव में लोहे की सान्द्रता बढ़ाती हैं। पिकराइट-बेसाल्ट में स्फोटगर्त या गुहिकाओं का निर्माण लावा से गैस के निकलने के कारण हुआ है तथा ये बाद में उत्तरजात खनिजों जैसे क्लोराइट, कैल्साइट, ओपल जियोलाइट इत्यादि से भर जाते हैं। ये सभी विशेषतायें हवाई द्वीप के क्षारीय बेसाल्ट के समान प्रतीत होती हैं।

डोलेराइट अल्पसिलिक भित्तियों का दूसरा प्रकार है। क्रिस्टलन की प्रारम्भिक अवस्था में निर्मित ऑलिवीन, प्लेजियोक्लेज और कुछ मात्रा में पाइरॉक्सीन के निर्माण से बचे हुये द्रवीभूत शैलों में सिलिका की सान्द्रता बढ़ जाने से थोलेआइट द्रवीभूत-शैल बना तथा इससे डोलेराइट भित्तियों का निर्माण हुआ जो हवाई द्वीप से मिलती हैं।

(ख) संकरित भित्तियों का शैलजनन

संकरित भित्तियों के शिलावीक्षण से यह पता चलता है कि इनके निर्माण में ज्वालामुखी क्रिया ही मुख्यतः उत्तरदायी है। लावा की गर्भावस्था में चूनामय एवं लौहमय क्लास्टिक अक्लास्टिक शैलों के स्वांगीकरण से इन भित्तियों का निर्माण हुआ। कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म में अच्छी तरह विकसित कैल्साइट क्रिस्टल ज्वालामुखी पदार्थों के साथ पाया जाता है। लिथिक टफ में लौह आक्साइड एवं कैल्साइट का परस्पर मिश्रण पाया गया है। कुछ में ज्वालामुखीय पदार्थ काँच से भरे पड़े हैं तथा उनमें सूच्याकार फेल्सपार भी वर्तमान है। अतः यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि कच्छ बेसिन में संकरित भित्तियों का निर्माण ज्वालामुखी पदार्थों में डिकैन ट्रैप के पूर्व निर्मित विभिन्न प्रकार के अवसादी शैलों जैसे बालुकाश्म एवं चूनापत्थर के स्वांगीकरण से हुआ है।

परिणाम तथा विवेचना

वर्तमान अध्ययन-क्षेत्र में कट्रोल शैलसमूह (ऊपरी जुरैसिक) को अन्तर्वेधित करती अल्पसिलिक एवं संकरित भित्तियाँ वर्तमान हैं। ये भित्तियाँ मुख्यतः बालुकाश्म या गादप्रस्तर शैलों को अन्तर्वेधित करती हुई पाई जाती हैं। अल्पसिलिक भित्तियाँ अधिकांशतः उ० प०-द० पू० दिशा में नतिलम्बित हैं। इनकी मोटाई 0.5 मी० से 16 मी० तक सीमित है एवं इनकी लम्बाई अधिकतम 300 मी० है। संकरित भित्तियाँ उ० पू०-द० प० एवं उ० प०-द० पू० में नतिलम्बित हैं तथा इनकी मोटाई 1.5 से० मी० से 2.5 मी एव० लम्बाई अधिकतम 1·8 मी० है।

इस क्षेत्र की अल्पसिलिक भित्तिकाँ दो प्रकार की हैं—पिकराइट-बेसाल्ट तथा डोलेराइट। पिकराइट-बेसाल्ट श्यामवर्णी, कठोर, संहत संपुंजित, स्फोटगर्ती या वातामकी हैं। सूक्ष्मदर्शी में ये असमकणीक, सूक्ष्म से स्थूलकणी तथा पूर्णक्रिस्टली से अर्धक्रिस्टली हैं। इनके गठन अन्तराकणिक, उपओफाइटी पुंजितपॉर्फिरीय या दीर्घक्रिस्टल-अन्तर्वेशी हैं। इनके लक्ष्यक्रिस्टलों में प्रमुख हैं—ऑलिवीन, पाइरॉक्सीन तथा प्लेजियोक्लेज। इनके मुख्य खनिज अवयव हैं—ऑलिवीन, प्लेजियोक्लेज (लेब्राडोराइट), ऑगाइट तथा कुछ गौड़ खनिज। किसी-किसी शैल में रूपान्तरण की अभिक्रिया प्रबल है।

डोलेराइट सूक्ष्म से मध्यकणीय, श्यामवर्णी, कठोर और संहत शैल हैं। सूक्ष्मदर्शी में ये सूक्ष्म से मध्यमकणीय, समकणीक, पूर्णाक्रिस्टली तथा अंशफलकीय से अफलकीय हैं। ये उपओफाइटी या ओफाइटी गठन दिखलाते हैं जिसमें प्लेजियोक्लेज के सपाट या प्रिज्मीय कण अंशतः या पूर्णरूपेण पाइरॉक्सीन में आवद्ध हैं। अपक्षय क्रियाओं से प्रभावित शैल में प्लेजियोक्लेज के अलावा अन्य खनिज अवयव को पहचानना कठिन है। डोलेराइट के खनिज घटक हैं—प्लेजियोक्लेज, पाइरॉक्सीन तथा कुछ गौण खनिज।

संकरित शैलों को शिलावीक्षण के आधार पर तीन भागों में विभक्त किया गया है। कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म, लिथिक टफ तथा विट्रिक टफ। कार्बोनेटाइट-संकोणाश्म स्थूलतः नीललोहित एवं अत्यधिक चूनामय हैं। सूक्ष्मदर्शी में ये असमकणिक तथा स्थूलकणी हैं। मुख्यतः ये कैलसाइट, स्फटिक, फेल्सपार, काँच, लौह-ऑक्साइड तथा कुछ कोणीय शैल-खण्डों से निर्मित हैं। लिथिक टफ को पुनः दो वर्गों में विभाजित किया गया है—कैल्सियमी-सिलिकामय लिथिक टफ तथा कैल्सियमी लिथिक टफ है। स्थूलतः लिथिक टफ सूक्ष्मकणीय, सुचूर्ण्य तथा चूनामय हैं। सूक्ष्मदर्शी में ये समकणीक हैं तथा अर्धगोलकीय से कणीय खनिजों एवं शैलखण्डों से निर्मित हैं। स्फटिक, फेल्सपार, बायोटाइट कैल्साइट तथा लौह-ऑक्साइड इनके प्रमुख अवयव खनिज हैं। विट्रिक टफ कठोर, संहत, सूक्ष्मकणीय एवं समकणीक हैं तथा काँच, फेल्सपार, पाइरॉक्सीन, शैल-खण्ड तथा आधात्रिका से बने हैं। काँच के शीर्ण-तन्तु की बहुलता इनकी विशेषता है।

भित्तियों के शैल-जनन की जानकारी उनके शिलावीक्षण एवं अध्ययन-क्षेत्र में प्राप्त तथ्यों के आधार पर किया गया है। वर्तमान क्षेत्र में पिकराइट-बेसाल्ट का जनन क्षारीय बेसाल्टिक द्रवीभूत

शैलों तथा डोलेराइट का निर्माण थोलिइटीक द्रवीभूत शैलों से हुआ है । ये दोनों हवाई द्वीप के क्षारीय बेसाल्ट एवं थोलिआइटी द्रवीभूत शैलों से मिलते-जुलते हैं । प्रस्तुत अध्ययन-क्षेत्र की संकरित भित्तियों के शैल-जनन से सम्बन्धित यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि इनका निर्माण डकन ट्रैप के पूर्व बने विभिन्न प्रकार के अवसादी शैलों बालुकाश्म एवं चूना-पत्थर के ज्वालामुखी पदार्थों में स्वांगीकरण से हुआ है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रोफेसर महाराज नारायण मेहरोत्रा, भूतपूर्व विभागाध्यक्ष, भौमिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय द्वारा प्राप्त आवश्यक सुविधा एवं डा० एस० जी० करकरे से मिले समुचित परामर्श के लिये उनके अत्यन्त आभारी हैं ।

निर्देश

1. विश्वास, एस० के०, **क्वार्ट० जर्न० जियो० माइन० मेटा० सोसा० इण्डिया**, 197, **43** (4), 223-235.

2. विश्वास, एस० के० तथा देश पाण्डेय, एस० बी०, **जर्न० जियो० सोसा० इण्डिया**, 1973,' **14** (2), 134-141.

3. जेटली, ए० के०, करकरे, एस० जी० तथा सिंह, सी० एस० पी०, **बुले० अर्थसाइंस**, 1980 **8**, 1-6.

4. करकरे, एस० जी० तथा अग्रवाल. ए०, **इंडियन जर्न० जियो० केम०**, 1984, **1**(2),11-26.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 29, No. 2, 1986

काली छाती के बया (प्लासियस बंगालेन्सिस) द्वारा एक वर्णीय नीड सौंदर्यकरण का गुणात्मक अध्ययन

सतीश कुमार शर्मा

क्षेत्रीय वन अधिकारी, उदयपुर (पश्चिम) रेंज

गुलाब बाग, उदयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 3, 1985]

सारांश

अन्य बया पक्षियों की तरह काली छाती वाले बया अपने अधूरे घोंसलों में पीले रंग के पुष्प सजाते हैं। पुष्प सजाने के कई तरीके हो सकते हैं परन्तु उनका एक ही उद्देश्य होता है—मादाओं को आकर्षित करना।

Abstract

Monochromic beautification of nests by black breasted weaver bird the ploceus benghalensis. Satish Kumar Sharma, Forest Range office, Udaipur (west) Range, Gulab Bagh, Udaipur.

Like other weavers. black breasted weaver bird used to display yehow coloured floral parts in their half built nests. There may be many ways of beautification but they only aim is to attract the females.

काली छाती वाले बया अपने घोंसले बड़ी घासों-जैसे मूँज, टाइफा, रीड, काँस, ईंख, ज्वार-बाजरा, नरकुल आदि पर रखते हैं। अन्य बया पक्षियों का तरह इस बया में भी बहु-पत्नी प्रथा पाई जाती है। एक नर कई मादाओं का हरम रखता है। घोंसले बनाने का कार्य नर द्वारा किया जाता है। जब घोंसला आधा बन चुका होता है तो नर इसका निर्माण रोक देता है एवं मादा की स्वीकृति का इन्तजार करता है। जैसे ही कोई मादा इस अधूरे घोंसले को पसन्द करती है कि नर उसे पूर्ण करने में जुट जाता है तथा मादा से संभोग कर, अण्डे दिये जाने के बाद मादा को घोंसला दे देता है। तदुपरान्त मादा अण्डों को सेती है, इधर नर दूसरी पत्नी लाने की तैयारी करता है। इस तरह प्रथम घोंसले के आस-पास दूसरा घोंसला बनाने लगता है। नर का यह कार्यक्रम पूरे वर्षाकाल चलता रहता है।

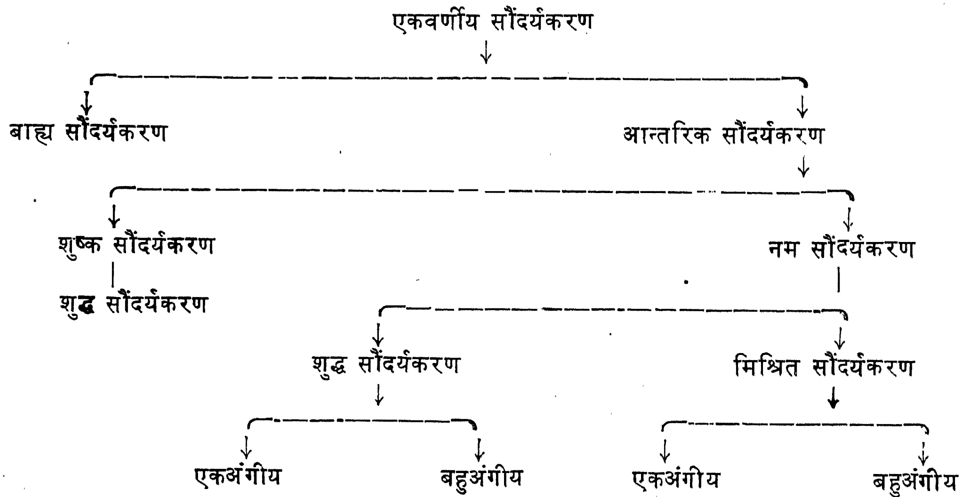
निरीक्षण

काली छाती वाले नरों द्वारा बनाये गये घोंसलों का ध्यानपूर्वक निरीक्षण करने पर बहुत ही आश्चर्यजनक तथ्य सामने आते हैं। अधिकांश आधे बने घोंसलों में अण्डकक्ष वाले अर्द्धांश में गीला गोबर या कीचड़ या दोनों का निक्षेप पाया जाता है। इस निक्षेप में कई तरह के पुष्प, पुष्प पंखडियाँ, फलों के छिलके, फलों के गूदे लगे पाये जाते हैं। कई बार ये सौंदर्यकारी पदार्थ घोंसलों की छत पर और कभी-कभी घासों की पत्तियों एवं तनों पर भी लगे मिलते हैं—(देखिये सारणी 1)। ये सब पदार्थ प्राय: पूर्ण घोंसलों पर लगे हुये नहीं मिलते।

सारणी 1 में दशाये गये सौंदर्यकारी पदार्थों के रंगों की जाँच-पड़ताल करने पर अत्यन्त आश्चर्यजनक एकरूपता सामने आती है। घोंसलों की सजावट में प्रयुक्त सभी वानस्पतिक पदार्थों (पुष्प, पुष्प पंखड़ियाँ) का रंग हल्का पीला, पीला, गहरा पीला, नारंगी या गुलाबी होता है। अर्थात् नर द्वारा अधूरे घोंसलों की सजावट हेतु जो भी अलंकारी पदार्थ प्रयोग में लाये जाते हैं वे यद्यपि विचित्र असमान प्रजातियों के पौधों से प्राप्त किये जाते हैं परन्तु उन सभी अलंकारी पदार्थों के रंग में समानता होती है। इस प्रकार के इकरंगे सौंदर्यकरण को **एकवर्णीय सौंदर्यकरण** कहते हैं।

सौंदर्यकरण के प्रकार

काली छाती वाले नर बया अपने अधूरे घोंसलों में पीले रंग के अलंकार कई तरह से सजाते हैं। ये प्रकार निम्नवत् हैं



आन्तरिक सौंदर्यकरण बहुत ही महत्वपूर्ण क्रिया है जो प्रजनन की सफलता में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। इस प्रकार के सौंदर्यकरण में समस्त अलंकारी पदार्थ घोंसलों के अन्दर अण्डकक्ष में लगाये जाते हैं। आन्तरिक सौंदर्यकरण दो तरह का होता है—शुष्क एवं नम। नम सौंदर्यकरण

बहुत ही विचित्र क्रिया है। इस प्रकार के सौंदर्यकरण में पहले नम गोबर, कीचड़ या मल अण्डकक्ष की आन्तरिक दीवारों पर एक पर्त के रूप में निक्षेपित किया जाता है। इस नम पर्त पर अलंकारी पदार्थों को रखा जाता है। यह विधि प्रायः उस समय अधिक उपयोग में लाई जाती है जब अलंकारी पुष्प कोमल प्रकृति के होते हैं एवं पौधे पर से तोड़े जाने पर जल्दी मुरझा जाते हैं। ये कोमल फूल नम आधार की नमी पाकर इतनी जल्दी नहीं मुरझा पाते एवं देर तक ताजा बने रहते हैं। कचरी (**कुकुमिस मीलो वैर मोमोडिका**) तथा जंगली करेला (**मोमोर्डिका बाल्सामिया**) के फूल नम निक्षेप विधि से ही लगाये जाते हैं।

शुष्क सौंदर्यकरण में नम निक्षेप लगाये बिना सीधे ही अलंकारी पदार्थों को अण्डकक्ष की दीवार में टाँग दिया जाता है। यह विधि प्रायः उन पुष्पों के लिये प्रयोग की जाती है जो तोडे जाने पर शीघ्र नहीं मुरझाते हैं। बबूल (**अकेशिया निलोटिका**) का सम्पूर्ण पुष्पक्रम या कुछ पुष्प कई बार शुष्क विधि से लगाये जाते हैं। बबूल के पुष्प नम विधि से भी लगाये जाते हैं। शुष्क विधि से लगाने पर पुष्प 'शुद्ध' रूप से ही सजाये जाते हैं।

नम सौंदर्यकरण को पुनः दो किस्मों में बाँटा गया है—शुद्ध सौंदर्यकरण एवं मिश्रित सौंदर्यकरण। अगर सजावट के लिये प्रयुक्त अलंकारी पदार्थ केवल एक ही प्रजाति के हों तो उसे **शुद्ध सौंदर्यकरण** कहते हैं। कई बार अलंकारी पदार्थ दो या अधिक प्रजातियों से लिये जाते हैं तब उसे **मिश्रित सौंदर्यकरण** कहा जाता है। बबूल एवं जंगली करेला के फूल; बबूल, जंगली करेला एवं कचरी के फूल; कचरी एवं जंगली करेला के फूलों का एकसाथ प्रयोग मिश्रित सौंदर्यकरण के उदाहरण हैं। अगर सौंदर्यकरण में प्रयुक्त अलकारी पदार्थ आकारिकी दृष्टि से समान हों, भले ही वे भिन्न-भिन्न प्रजातियों से ही क्यों न लिये गये हों **एकअंगीय सौंदर्यकरण** कहलाते हैं—जैसे—लेन्टाना व जंगली करेला के फूल। यदि एक ही जाति के आकारिकी दृष्टि से भिन्न-भिन्न अंग प्रयोग में लाये जायें तो वह **बहुअंगीय सौंदर्यकरण**— कहलायेगा जैसे जंगली करेला के फूल एवं फलों के छिलकों का एक ही घोंसले में पाया जाना।

बाह्य सौंदर्यकरण वास्तव में कोई सौंदर्यकरण नहीं है। इस प्रकार के सौंदर्यकरण में अलंकारी पदार्थ घोंसलों को छत एवं बाहरी दीवार तथा घासों की पत्तियों व तनों पर लगाये जाते हैं। कई बार अलंकारी पदार्थों को ढोने के दौरान कुछ पुष्प या पंखडियाँ नर पक्षी घोंसले की छत पर डाल देता है जो शायद उसकी चोंच में से फिसल कर गिर जाते हैं। कई बार अलंकारी पदार्थ लाने के दौरान वह अपनी चोंच घोंसले की बाहरी सतह या घास की पत्तियों व तनों से रगड़ कर साफ करता है तो अलंकारी पदार्थों के टुकड़े इन स्थानों पर छूट जाते हैं।

गोबर-मिट्टी के निक्षेप से लेकर अलंकारों को पौधों से तोड़ने, ढोने एवं घोंसले में लगाने-सजाने का सारा काम चोंच की मदद से किया जाता है। प्रायः सौंदर्यकरण सुबह के समय ज्यादा किया जाता है। यह सब लीपा-पोती और सजावट मादा को आकर्षित करने के लिये की जाती है। जैसे ही कोई मादा अधूरे घोंसले को स्वीकार कर लेती है, तो नर गोबर व अलंकारी पदार्थों को पूरी तरह

या आंशिक रूप से हटा कर उसे पूर्ण कर देता है ताकि मादा उसमें अण्ड दे सके। जब गोबर एवं अलंकारी पदार्थ आंशिक रूप से हटाये जाते हैं तो घोंसला पूर्ण होने के बाद भी बचे गोबर के गोले एवं सूखे पीले फूलों के अवशेष घोंसले के ऊपरी अर्द्धांश में देखे जा सकते हैं।

सारणी 1

काली छाती के बया द्वारा नीड सौंदर्यकरण हेतु प्रयुक्त अलंकारी पदार्थ

क्रम	वैज्ञानिक नाम	हिन्दी नाम	कुल	प्रयोग में लाये गये अंग का प्रकार	प्रयुक्त अंग का रंग
1.	Lanlana camara	बेशर्म	वर्बीनेसी	पुष्प	पीले व गुलाबी
2.	Acacia nilotica	बबूल, कीकर	लैग्यूमिनोसी	पुष्प क्रम एवं पुष्प	पीले
3.	Cucumis melo var momordica	कचरी	कुकरबिटेसी	पुष्प	पीले
4.	Momordica dioca	जंगली करेला	कुकुरबिटेसी	पुष्प	हल्के पीले
5.	Momordica balasmia	जंगली करेला	कुकुरब्रिटेसी	पुष्प, पके फलों के छिलके आदि	पीला व नारंगी

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० सालिम अली, (अध्यक्ष बॉम्बे नेचुरल हिस्ट्री सोसाइटी); डा० एन० मजूमदार, (जूलॉजीकल सर्वे आफ इन्डिया, कलकत्ता); श्री एस० एफ० हैक, (नैनीताल, उत्तर प्रदेश); श्री सुधीर सेन गुप्त, (वैज्ञानिक, जूलॉजीकल सर्वे ऑफ इन्डिया, कलकत्ता); डा० वाय० पी० सक्सेना, (राजकीय रेशम फार्म, दीपलपुर, म० प्र०); श्री अरुण सेन, आई० एफ० एस०; श्री आर० एस० भण्डारी, आई० एफ० एस०; श्री एम० एस० दायमा, आई० एफ० एस०; श्री० यू० एम० सहाय, आई० एफ० एस० का बहुत आभारी है क्योंकि इन विद्वानों ने समय-समय पर लेखक के अनुसंधान पत्रों को देखा है तथा मार्ग-दर्शन किया है।

निर्देश

1. अली, एस० तथा रिप्ले, एस० डी०, Handbook of Birds of India and Pakistan.

2. अली, एस०, **जर्नल ऑफ बॉम्बे नेचुरल हिस्ट्री सोसाइटी**, 1931, **34**, 947-64.

3. अली, एस० तथा अम्बेडकर, वी० सी० **जे० बी० एन० एच०** एस०, 1956, **53**, 381-89.

4. अम्बेडकर. वी० सी०, एम० एस-सी० थीसिस, यूनिवर्सिटी ऑफ बॉम्बे; बॉम्बे, 1964.

चित्र 1. **प्लासियस बंगालेन्सिस** का अधूरा घोंसला मूंज (**सैकेरम मूंजा**) पर। घोंसले के अण्ड कक्ष में (नीचे की तरफ) गोबर का निक्षेप साफ दिखायी पड़ रहा है।

चित्र 2. वही अधूरा घोंसला (क्र० 1) पूरा होने पर। मादा द्वारा अधूरा घोंसला स्वीकार कर लेने पर नर ने इसे पूरा कर दिया। पुराने एवं अर्द्धांश के रंग में स्पष्ट अन्तर नजर आ रहा है।

जब नर में अधूरे घोंसले को पूरा किया तब उसने आंशिक रूप से ही गोबर को हटाया था। पूर्ण घोंसले में भी घोंसले के प्रारम्भिक अर्द्धांश में कुछ गोबर बाहर की तरफ नजर आ रहा है।

चित्र 3. **प्लासियस बंगालेन्सिस** के अधूरे घोंसले के अण्ड कक्ष में गोबर एवं गोबर पर लगे फूल स्पष्ट नजर आ रहे हैं।

चित्र 4. **प्ला० बंगालेन्सिस** के अधूरे घोंसले में अण्ड कक्ष में लगे गोबर में पीले रंग के कुछ दिन पूर्व लगाये पुष्पीय पदार्थ (जो चित्र में मुर्झाये नजर आ रहे हैं) स्पष्ट नजर आ रहे हैं।

चित्र 5. **प्ला० बंगालेन्सिस** के अधूरे घोंसले में गोबर पर लगे ताजा पुष्पीय अलंकार।

Vol. 29, No. 2, April 1986

विषय-सूची

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc.

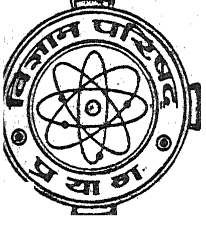
मूल्य
वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 8 पौंड या 32 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० या 2 पौंड या 8 डालर

Rates
Annual Rs. 12 *or* 8 £ *or* $ 32
Per Vol. Rs. 3 *or* 2 £ *or* $ 8

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 29 **July 1986** **No. 3**

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद् · इलाहाबाद

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 3, 1986

गोलाभ तरंग फलन को अन्तर्ग्रस्त करने वाले द्विक व्हिटेकर रूपान्तर के कतिपय समाकल निरूपण

ए० सिद्दीकी
स्कूल आव बायोइंजीनियरिंग, आई० टी०
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी
तथा
एस० एन० दुबे
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, आई० टी०
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जुलाई 1, 1985]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का लक्ष्य माइजर द्वारा प्रदत्त $W_{k,m}\{t(x+y)\}$ के विभिन्न समाकल निरूपणों के उपयोग से गोलाभ तरंग फलन को अन्तर्ग्रस्त करने वाले व्यापकीकृत द्विक व्हिटेकर रूपान्तर के कतिपय समाकल निरूपणों को कई प्रमेयों के रूप में प्राप्त करना है।

Abstract

On some integral representation of the double Whittaker transform involving spheroidal wave function. *By* A. Siddiqui, School of Bio-Engineering, I. T., B. H. U. and S. N. Dube, Applied Maths Section, I. T., Banaras Hindu Universty, Varanasi.

In the present paper, we first aim at obtaining some integral representations for the generalized double Whittaker transform involving spheroidal wave function in the form of several theorems by using different integral representations for $W_{k,m}\{t(x+y)\}$ due to Meijer.

1. विषय प्रवेश

कई चरों वाले H-फलन को[1] के अनुरूपतः परिभाषित तथा निरूपित किया गया है। किन्तु सुविधा तथा संक्षेप के लिये, प्रस्तुत शोध पत्र में सर्वत्र श्रीवास्तव एवं पाण्डा[1] द्वारा प्रदत्त संकुचित संकेतन का हम उपयोग करेंगे। बाद में प्रयुक्त होने वाले ज्ञात परिणामों ([2], p. 16) का निम्नलिखित रूप में स्मरण किया जा सकता है।

(i) गोलाभ तरंग फलन को निम्नलिखित द्वारा प्रकट किया जा सकता है

$$S_{\mu\nu}(c, x) = \sum_{r=0,1}^{\infty}{}^{*} d_r^{\mu\nu}(c)\, P_{\mu+r}^{\mu}(x) \tag{1.1}$$

जहाँ कि गुणांक $d_r^{\mu\nu}(c)$ परिवर्तन सूत्र ([2], equ. 3.1.4) को संतुष्ट करते हैं तथा संकलन के ऊपर तारांकन * यह बताता है कि संकलन r के केवल सम अथवा विषम मानों के लिये जैसा कि $(n-m)$ सम अथवा विषम हो, किया गया है।

गोलाभ तरंग फलन को अन्तर्ग्रस्त करने वाले द्विक व्हिटेकर रूपान्तर को निम्नलिखित द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$\phi(t) = \int_0^{\sigma}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (x+y)^{\sigma} \exp\{-\tfrac{1}{2}t(x+y)\}\, W_{k,m}\{t(x+y)\}$$

$$S_{\mu\nu}(c, x)\; H_{p,\,q\,:\,[P',\,Q'],\,\ldots,\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]}^{0,\,n\,:\,(M',\,N'),\,\ldots,\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}$$

$$\left[\begin{array}{l} \{(a_p;\alpha_p',\ldots,\alpha_p^{(r)})\}:\{(C_p',r_p')\},\ldots,\{C_p^{(r)}(r),\nu_p^{(r)}(r)\} \\ \{(b_q;\beta_q',\ldots,\beta_q^{(r)})\}:\{d_{Q'}',\delta_{Q'}'\},\ldots,\{d_Q^{(r)}(r):\delta_Q^{(r)}(r)\} \end{array}\right.$$

$$\left| x^{\alpha_1} y^{\beta_1} (x+y)^{\sigma_1}, \ldots, x^{\alpha_r} y^{\beta_r} (x+y)^{\sigma_r} \right| f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.2}$$

संक्षेपण के लिये हम (1.2) को निम्नलिखित द्वारा प्रदर्शित करेंगे

$$\phi(t) = DW[f(x, y)]$$

तथा द्विक रूपान्तर

$$\int_0^{\sigma}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (x+y)^{\sigma_1} H[x^{\alpha_1} y^{\beta_1} (x+y)^{\sigma_1}, \ldots, x^{\alpha_r} y^{\beta_r} (x+y)^{\sigma_r}]$$

$$f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.3}$$

को $DT\,[f(x, y)]$ के द्वारा निरूपित करेंगे ।

पुनश्च, हम (1.2) अर्थात् $DWST\,[f(x, y)]$ के निम्नलिखित द्वारा प्रदर्शित करेंगे ।

$$\Phi^{a,\,\beta,\,k,\,m,\,\mu\,v}_{0,\,n\,:\,(M',\,N'),\,\ldots,\,(M^{(r)},\,N^{(r)};\,p,\,q\,:\,(P,Q'),\,(P^{(r)},\,\ldots,\,Q^{(r)})}(t) \tag{1.4}$$

2. प्रमेय 1

यदि

$$\phi\,(t)=DW\,[f(x, y)], \tag{2.1}$$

तथा

$$g\,(t, z)=DT\,[e^{-t(x+y)}\,(x+y)^{1/2}\,K_{2m}\,(2\sqrt{(t(x+y)z)})\,f(x, y)] \tag{2}$$

हो तो

$$\phi\,(t)=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\;\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}^{*}\,d_r^{\mu v}(c)\,P^{\mu}_{\mu+r}(x)\int_0^{\infty} e^{-z^2}\,z^{-2k}\,g\,(t, z)\,dz \tag{2.2}$$

बशर्ते कि

$Re\,(\frac{1}{2}-k\pm m)>0,\ Re\,(t)>0,\ Re\,(\alpha)>0,\ Re\,(\beta)>0,\ \alpha_i, \beta_i, \sigma_i>0,\ i=1,\ldots,r.$

$Re\,[\alpha+\beta+\sigma+m+\alpha_i+\beta_i+\sigma_i+1)>0,\ |\arg\,(z_i)|<\frac{1}{2}\Delta_i\pi$

$$\Delta_i=\sum_{j=1}^{M^{(i)}}\delta_j^{(i)}-\sum_{j=M^{(i)}+1}^{q^{(i)}}\delta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\gamma_j^{(i)}+\sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}}\gamma_j^{(i)}-\sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{q}\beta_j^{(i)}>0,\ i=1, 2, \ldots, r,$$

$$\alpha_i=\min_j\,Re\left[\frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}\right],\ j=1, \ldots M^{(i)},\ i=1, \ldots r$$

$$\beta_i=\max_j\,Re\left[\frac{\left(C_j^{(i)}-1\right)}{\gamma_j^{(i)}}\right],\ j=1, \ldots N^{(i)},\ i=1, \ldots r$$

$x>0,\ y>0$ के लिये $f(x, y)$ एक सतत फलन है तथा परिणामस्वरूप प्राप्त समाकल (2.2) निरपेक्षतः अचर है ।

उपपत्ति

माइजर [3, p. 299] द्वारा प्रदत्त समाकल निरूपण का $W_{k,m}\{t(x+y)\}$ के लिये उपयोग करने पर

$$W_{k,m}\{t(x+y)\}=\frac{4\{t(x+y)\}^{1/2}\, e^{-1/2t(x+y)}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}$$

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, z^{-2k}\, k_{2m}\,(2\sqrt{(t(x+y)z)})\, dz \tag{2.4}$$

जहाँ $Re\,(t)>0$, $Re\,(\frac{1}{2}-k\pm m)>0$ तथा गोलाभ तरंग फलन का (1.1) से (1.2), में उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\phi\,(t)=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}^{*}\, d_r^{\mu v}\,(c)\, P_{\mu+r}^{\mu}\,(x)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\,(x+y)^{\sigma+1/2}\, e^{-t(x+y)}$$

$$H\,[x^{\alpha_1}\, y^{\beta_1}\,(x+y)^{\sigma_1},\, \ldots,\, x^{\alpha_r}\, y^{\beta_r}\,(x+y)^{\sigma_r}]\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, z^{-2k}\, k_{2m}(2\sqrt{(t(x+y)z)})\, dz \tag{2.5}$$

(2.5) में समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर हम पाते हैं कि

$$\phi\,(t)=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\;\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{\mu v}\,(c)\, P_{\mu+r}^{\mu}\;(x)$$

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, z^{-2k}\, dz\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\,(x+y)^{\sigma+1/2}\, e^{-t(x+y)}$$

$$H\,[x^{\alpha_1}\, y^{\beta_1}\,(x+y)^{\sigma_1},\, \ldots,\, x^{\alpha_r}\, y^{\beta_r}\,(x+y)^{\sigma_r}]\; K_{2m}\,(2\sqrt{(t(x+y)z)})\, f(x,y)$$

$$=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\;\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}^{*}\, d_r^{\mu v}\,(c)\, P_{\mu+r}^{\mu}\;(x)$$

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\, z^{-2k}\, g(t,z)\, dz \tag{2.6}$$

समाकलन में क्रम प्रतिलोमन को निम्नलिखित द्वारा उचित ठहराया जा सकता है।

z-समाकल निरपेक्षत: अभिसारी होता है यदि $R\,(t)>0$, $Re\,(\frac{1}{2}\pm m-k)>0$. x तथा y में द्विक समाकल अभिसारी होता है यदि $Re\,(\alpha)>0$, $Re\,(\beta)>0$, $\alpha_i, \beta_i, \sigma_i>0$ $i=1, 2, \ldots, r$. के लिये

पुनरावृत्त समाकल (2.5) निरपेक्षतः अभिसारी होता है। यदि (2.6) में परिणामस्वरूप प्राप्त समाकल निरपेक्षतः अभिसारी हो। अतः द.ल वाले पुसिन के प्रमेय [4, p. 504] से प्रतिलोमन का औचित्य हो जाता है।

प्रमेय 2

यदि

$$\phi(t)=\Phi^{\alpha,\,\beta,\,\sigma,\,k,\,m,\,\mu,\,\nu}_{0,\,n,\,p,\,q,\,(M^{(r)},\,N^{(r)}),\,(P^{(r)},\,Q^{(r)})}(t)$$

$$=DW[f(x,y)] \tag{2.7}$$

तथा

$$g(t,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{j-1/4}\sin^{2j}z}{j!}$$

$$\Phi^{\alpha,\,\beta,\,\sigma+j-\frac{1}{4},\,k-\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4},\,\mu\nu}_{0,\,n,\,p,\,q,\,[(M^{(r)},\,N^{(r)}],\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}],\,\operatorname{sech} z}(t\cosh^2 z), \tag{2.8}$$

तो

$$\phi(t)=\frac{2^{2k-1}\,\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm m)}$$

$$\int_0^\infty \cosh 2mz\,\operatorname{sech}^{1/2} z\; g(t,z)\,dz \tag{2.9}$$

बशर्ते कि

$R(t)>0$, $|\arg t|<3/2\pi$, $R(\frac{1}{2}-k\pm m)>0$, $\alpha_i, \beta_i, \sigma_i>0$, $i=1, 2, \ldots, r$,

$Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$, $Re(t)>0$, $R(\alpha+\beta+\sigma+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}+\alpha_i+\beta_i+\sigma_i)>0$,

$i=1, 2, \ldots, r$, और $f(x,y)$, $x>0, y>0$ के लिए, संतत फलन है तथा परिणामस्वरूप प्राप्त समाकल (2.9) निरपेक्षतः अभिसारी है।

उपपत्ति

$W_{k,m}\{t(x+y)\}$ के लिये माइजर [5, p. 601] द्वारा प्रदत्त समाकल निरूपण का उपयोग करने पर अर्थात्

$$W_{k,m}\{t(x+y)\}=\frac{2^{k+3/2}\,\Gamma(1+2k)\,\{t(x+y)\}^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}$$

$$\int_0^\infty \exp\{\tfrac{1}{2}t(x+y)\}\sinh^2 D_{2k-1}(\sqrt{(2t(x+y)\cosh^2 z)})\cosh^2 mz\,dz \tag{2.10}$$

जबकि $t\neq 0$, $|\arg t|<3/2\pi$ तथा $R(\frac{1}{2}-k\pm m)>0$, तथा (1.1) से हम पाते हैं कि

$$\phi(t)=\frac{2^{k+3/2}\,\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}$$

$$\int_0^x\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,(x+y)^\sigma\,\{t(x+y)\}^{1/2}\exp\{-\tfrac{1}{2}t(x+y)\}$$

$$S_{\mu v}(cx)\,H\,[x^{\alpha_1}\,y^{\beta_1}\,(x+y)^{\sigma_1},\,\ldots,\,x^{\alpha_r}\,y^{\beta_r}\,(x+y)^{\sigma_r}]\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{t}{2}\,(x+y)\right\}\sinh^2 z\,D_{2k-1}\,(\sqrt{(2t(x+y)\cosh^2 z)}\,\cosh^2 mz\,dz \tag{2.11}$$

निम्नलिखित सम्बन्ध से $D_{2k-1}\,\{\sqrt{(2t\,(x+y)\cosh^2 z)}$ का मान रखने

$$D_n\,(z)=z^{1/2n+1/4}\,z^{-1/2}\,W_{n/2+1/4,1/4}\,(\tfrac{1}{2}z^2) \tag{1.12}$$

तथा समाकलन के क्रम को बदल कर हम पाते हैं कि

$$\phi(t)=-\frac{2^{2k+1}\,\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\;\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}$$

$$\int_0^\infty \cosh^2 mz\,\sin^{1/2} z\,g(t,z)\,dz \tag{2.13}$$

जबकि

$$g\,(t,z)=\int_0^x\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,(x+y)^{\sigma-1/4}\exp\left\{-\frac{t}{2}\,(x+y)\right\}$$

$$(1-\sinh^2 z)\,t^{-1/4}\,W_{k-1/4,-1/4}\,\{t(x+y)\cosh^2 z\}$$

$$S_{\mu v}\,(cx)\,H\,[x^{\sigma_1}\,y^{\beta_1}\,(x+y)^{\sigma_1},\,\ldots,\,x^{\alpha_i}\,y^{\beta_i}\,(x+y)^{\sigma_i}]\,f(x,y)\,dx\,dy \tag{1.14}$$

$\{t(x+y)\sinh^2 z\}$ को $\{t\,(x+y)\sinh^2 z\}$ के घातों में प्रसार करने तथा समाकल एवं संकलन के क्रम को बदल कर हम पाते हैं कि

$$g(t,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{tj^{-1/4}\sinh^{2}j\,z}{j\,!}$$

$$\Phi^{\alpha,\,\beta,\,+j-1/4,\,k-1/4,\,-1/4,\,\mu v}_{0,\,n,\,p,\,q,\,[M^{(r)},\,N^{(r)}],\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}],\,\mathrm{sech}^2 z}\,(t\cosh^2 z) \tag{2.15}$$

तथा इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हुआ ।

प्रमेय 1 की भाँति ही समाकलन के क्रम अनुलोमन को उचित ठहराया जा सकता है। (2.14) में समाकलन एवं संकलन के क्रम परिवर्तन को उचित ठहाराया जा सकता है बशर्ते कि

$$\text{(i) } \exp\,(x+y)\sinh^2 z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\sinh^2 z)j}{j\,!}\,\{t(x+y)\}j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\sinh z)^2 j}{j\,!}\; tj\,(x+y)\,j$$

किसी निश्चित अन्तराल $0 \leqslant x \leqslant h$, में जहाँ h याद्दच्छिक है एकसमानतः अभिसारी हो

(ii) $x>0, y>0$ के लिये $f(x, y)$ संतत हो, तथा

(iii) समाकल एकसमानतः अभिसारी हो जैसा कि वास्तव में है यदि

$R\,(t)>0,\ R\,(\alpha+\beta+\sigma+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4} \,;\, \alpha_i+\beta_i+\sigma_i)>0.$

प्रमेय 3

यदि

$$\phi\,(t)=DW\,[f(x, y)] \tag{2.16}$$

तथा

$$g\,(t, z)=DT\,[(x+y)^{3/2} \exp\left\{\frac{t}{2}\,(x+y)\right\} K_{2m}\,\{t(x+y)\cosh z\}]\,f(x, y) \tag{2.17}$$

हो तो

$$\phi\,(t)=t^{3/2}\sqrt{(2/\pi)}\ \sum_{r=0,1}^{\infty}{}^{*}\ d_r^{\mu v}\,(c)\,P_{\mu+r}^{\mu}\,(x)$$

$$\int_0^{\infty} P_{m-1/2}^{k}\,(\cosh z)\,\sinh^{(1-k)} z \cosh^{(1/2+k)} z\; g\,(t, z)\,dz \tag{2.18}$$

बशर्ते कि

$$R\,(t)>0,\ |\arg t|<\pi/2,\ Re\,(k)<3/2,\ Re\,(v)>0,$$

$$Re\,(\beta)>0,\ Re\,[\alpha+\beta+\sigma+3/2\pm m+\alpha_i+\sigma_i+\beta_i)>0,$$

तथा $x>0$, $y>0$ के लिये $f(x, y)$ एक संतत फलन हो तथा परिणामस्वरूप प्राप्त (2.17) में समाकल निरपेक्षतः अभिसारी हो।

$W_{k,m}\{t(x+y)\}$ के लिये माइजर [5, p. 603] द्वारा प्रदत्त समाकल निरूपण के उपयोग तथा समाकलन के क्रम परिवर्तन द्वारा इस प्रमेय को आसानी से सिद्ध किया जा सकता है।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एच० एम०, J. Reine Angew. Math. 1976, **288**, 129-145.
2. फ्लेमर, सी०, Spheroidal wave functions, स्टैनफोर्ड यूनिवर्सिटी, दि प्रेस कैलीफोर्निया 1957.
3. माइजर, सी०, एस०, Proc. Akad. Wetensch, Amsterdam, 1941, **44**, 298-307.
4. ब्रामविट्श, टी० जे०, An Introduction to the Infinite Series, लन्दन, 1931.
5. वही, Proc. Nedrl. Akad. Wetensch, Amsterdam, 1941, **44**, 599-605.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 3, 1986

A-रूपान्तर के लिये एक वास्तविक प्रतिलोमन प्रमेय

नरोत्तम जोशी

गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय

जयहरिखाल (लैंसडाउन), गढ़वाल (उ० प्र०)

[प्राप्त—मई 19, 1984]

सारांश

इस प्रपत्र में संवलन-रूपान्तर विधि के प्रयोग द्वारा चतुर्वेदी तथा गोयल[1] द्वारा परिभाषित A-रूपान्तर हेतु एक वास्तविक प्रतिलोमन प्रमेय की उपपत्ति दी गयी है। चूँकि गुप्ता तथा मित्तल[4] द्वारा परिभाषित H-फलन रूपान्तर भी इस रूपान्तर की एक विशिष्ट दशा है और अनेक महत्वपूर्ण समाकल रूपान्तर, H-फलन रूपान्तर की विशिष्ट दशायें हैं। अत: A-रूपान्तर के लिये प्रतिलोमन संकारक का अध्ययन इन रूपान्तरों के लिये कुंजी संकारक का कार्य करता है।

Abstract

A real inversion theorem for A-transform. *By* Narottam Joshi, **Department** of Mathematics, Government Degree College, Jaihari Khal (Lansdowne), Garhwal (U. P.).

In this paper, the author has used convolution transform method to prove a real inversion theorem for A-transform defined by Chaturvedi and Goyal[1]. Since H-function transform follows as a special case of a A-transform and many important integral transforms follow as special cases of H-function transform, therefore, the study of inversion operator for A-transform serves as key operator for these integral transforms.

1. प्रस्तावना

चतुर्वेदी तथा गोयल [1] ने A-रूपान्तर निम्न रूप में परिभाषित किया है

$$F(s)=s\int_0^{\infty} A(sy)f(y)\,dy \tag{1.1}$$

जहाँ $A(x)$ एक फलन है, जिसे गौतम तथा गोयल[3] ने निम्न प्रकार से परिभाषित किया है

$$A(x) \equiv A_{p,\,q}^{m,\,n}\left[x \left| \begin{matrix} \{(a_p,\,\alpha_p)\} \\ \{(b_q,\,\beta_q)\} \end{matrix} \right.\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_1^m \Gamma(a_j - \alpha_j s) \prod_1^n \Gamma(1 - b_j + \beta_j s)}{\prod_{m+1}^p \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s) \prod_{n+1}^q \Gamma(b_j - \beta_j s)} x^{-s}\, ds \tag{1.2}$$

जिसमें प्राचल इस प्रकार सीमित हैं कि A-फलन सार्थक है तथा L एक मेलिन-बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है। विस्तार के लिये गौतम तथा गोयल[3] का अध्ययन अपेक्षित है। उन्होंने यह भी दिखाया है कि (1.2) के दाँये पक्ष का समाकल परम अभिसारी होता है जब

$$\sum_1^p I(\alpha_j) - \sum_1^q I(\beta_j) = 0,\ K = \sum_1^m R(\alpha_j) - \sum_{m+1}^p R(\alpha_j) + \sum_1^n R(\beta_j) - \sum_{n+1}^q R(\beta_j),$$

$$\left|\arg\left(\prod_1^p \alpha_j^{\alpha_j} \prod_1^q \beta_j^{-\beta_j}\right) x\right| < \tfrac{1}{2}\pi\, k.$$

2. A-रूपान्तर : संवलन रूपान्तर के रूप में

यदि फलन $\phi(x)$ का संवलन रूपान्तर, जिसकी अष्टि $G(x)$ है, निम्न प्रकार से परिभाषित हो

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\ \phi(t)\ dt \tag{2.1}$$

तो संगत प्रतिलोमन फलन निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है

$$[E(x)]^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} G(y)\ e^{-xy}\ dy \tag{2.2}$$

समीकरण (1.1) से,

$$F(s) = s\int_0^{\infty} A(sy)\ f(y)\ dy$$

उपर्युक्त समीकरण में $s = e^s$ तथा $y = e^{-y}$ रखने पर

$$F(e^s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s-y)}\ A(e^{s-y})\, f(e^{-y})\ dy$$

अथवा

$$\eta(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{(s-y)} A(e^{s-y}) \xi(y)\, dy$$

जहाँ

$$\eta(s)=F(e)^s \text{ तथा } \zeta(y)=f(e^{-y}).$$

अत: प्रतिलोमन फलन $E(x)$ निम्न समीकरण द्वारा दिया जा सकता है

$$[E(x)]^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{y} A(e^{y}) e^{-xy}\, dy$$

$$=\frac{\prod_{1}^{m} \Gamma(a_j+\alpha_j x-\alpha_j) \prod_{1}^{n} \Gamma(1-b_j-\beta_j x+\beta_j)}{\prod_{m1+}^{p} \Gamma(1-a_j-\alpha_j x+\alpha_j) \prod_{n+1}^{q} \Gamma(b_j+\beta_j x-\beta_j)},$$

चूंकि A-फलन की परिभाषा तथा फूरिये-मेलिन विलोमन प्रमेय[6] के उपयोग से हम पाते हैं कि

$$\int_{0}^{\infty} x^{s-1} A(x)\, d(x)=\frac{\prod_{1}^{m} \Gamma(a_j-\alpha_j s) \prod_{1}^{n} \Gamma(1-b_j+\beta_j s)}{\prod_{m+1}^{p} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s) \prod_{n+1}^{q} \Gamma(b_j-\beta_j s)},$$

बशर्ते कि

$$\sum_{1}^{p} I(\alpha_j)-\sum_{1}^{q} I(\beta_j)=0,\ K=\sum_{1}^{m} R(\alpha_j)-\sum_{m+1}^{p} R(\alpha_j)+\sum_{1}^{n} R(\beta_j)-\sum_{n+1}^{q} R(\beta_j)>0,$$

$$\left|\arg\left(\prod_{1}^{p} \alpha_j^{\alpha_j} \prod_{1}^{q} \beta_j^{-\beta_j}\right) x\right|<\tfrac{1}{2}\pi k,\ R\left(\frac{a_j}{\alpha_j}+s-2\right)<0\ (h=1, \ldots, m),$$

तथा

$$R\left(\frac{b_j-1}{\beta_j}+s\right)>0\ (j=1, \ldots, n).$$

अब

$$E(D)\{\eta(s)\}=\zeta(s)$$

अथवा

$$\frac{\prod_{m+1}^{p} \Gamma(1-a_j-\alpha_j D+\alpha_j) \prod_{n+1}^{q} \Gamma(b_j+\beta_j D-\beta_j)}{\prod_{1}^{m} \Gamma(a_j+\alpha_j D-\alpha_j) \prod_{1}^{n} \Gamma(1-b_j-\beta_j D+\beta_j)}\{F(e^{s})\}=f(e^{-s}),$$

जहाँ

$$D=\frac{d}{ds}$$

एर्डेल्यी इत्यादि[2] ने निम्न परिणाम ज्ञात किया है

$$\Gamma(z)=\lim_{r\to\infty}\frac{r\,!\,r^{z}}{\prod\limits_{r=0}^{r}(z+k)}$$

इस परिणाम के उपयोग से हम प्राप्त करते हैं

$$E(D)=\lim_{r\to\infty}(r\,!)^{p+q-2(m+n)}\,r^{p-m-n+(\sum_{1}^{q}\beta_j-\sum_{1}^{p}\alpha_j)D+\sum_{1}^{q}(b_j-\beta_j)-\sum_{1}^{p}(a_j-\alpha_j)}$$

$$.\prod_{k=0}^{r}\frac{\prod\limits_{1}^{m}(\alpha_j D+a_j-\alpha_j+k)\prod\limits_{1}^{n}(-\beta_j D+1-b_j+\beta_j+k)}{\prod\limits_{m+1}^{p}(-\alpha_j D+1-a_j+\alpha_j+k)\prod\limits_{n+1}^{q}(\beta_j D+b_j-\beta_j+k)}$$

$$=\lim_{r\to\infty}(r\,!)^{p+q-2(m+n)}(-1)^{(m+n-p)(r+1)}\,r^{p-m-n+(\sum_{1}^{q}\beta_j-\sum_{1}^{p}\alpha_j)+\sum_{1}^{q}(b_j-\beta)+\sum_{1}^{p}(a_j-\alpha_j)}$$

$$\prod_{k=0}^{r}\frac{\prod\limits_{1}^{n}(\alpha_j D+a_j-\alpha_j+k)\prod\limits_{1}^{n}(\beta_j D+b_j-\beta_j-1-k)}{\prod\limits_{m+1}^{p}(\alpha_j D+a_j-\alpha_j-1-k)\prod\limits_{n+1}^{q}(\beta_j D+b_j-\beta_j+k)} \qquad (2.3)$$

हिर्शमान तथा विडर द्वारा ज्ञात परिणामों [5, p. 66] में एक साधारण सा प्रतिस्थापन करने पर हम पाते हैं

$$\prod_{k=0}^{n}(\alpha D+a-k)\,[e^{-a/\alpha x}\,F(e^{x/\alpha})]=e^{(n+1-a)x/\alpha}\,F^{n+1}(e^{x/\alpha}) \qquad (2.4)$$

$$\prod_{k=0}^{n}(\alpha D+a+k)\,[e^{-(a+n)x/\alpha}\,F(e^{x/\alpha})]=e^{-(a-1)x/\alpha}\,F^{n+1}(e^{x/\alpha}) \qquad (2.5)$$

साथ ही,

$$\prod_{k=0}^{n} (\alpha\, D+a+k)^{-1}\, [e^{-(a-1)x/\alpha}\, F\, (e^{x/\alpha})] = e^{-(a+n)x/\alpha}\, F^{-n-1}\, (e^{x/\alpha}) \tag{2.6}$$

तथा

$$\prod_{k=0}^{n} (\alpha\, D+\alpha-k)^{-1}\, [e^{(n+1-a)x/\alpha}\, F\, (e^{x/\alpha})] = e^{-a/\alpha x}\, F^{-n-1}\, (e^{x/\alpha}) \tag{2.7}$$

जहाँ $\alpha \neq 0,\; D = \dfrac{d}{dx}$

तथा $F^{-n-1}(x)$ वह फलन है जिसका $(n+1)$ कोटि का अवकल गुणांक $F(x)$ है । परिणामों (2.4), (2.5), (2.6) तथा (2.7) का (2.3) में उपयोग करने पर हम प्राप्त कर सकते हैं,

$$E\,(D)\, \{F\,(e^s)\} = \lim_{r\to\infty} (-1)^{(m+n-p)(r+1)}\, (r\,!)^{p+q-2(m+n)}$$

$$\cdot\, r^{p-m-n+}\Big(\sum_1^q (\beta_j - \sum_1^p \alpha_j) + \sum_1^q (b_j-\beta_j) - \sum_1^p (a_j - \alpha_j).$$

$$\cdot\, e^{\left(\frac{1-a_p}{\alpha_p}-1\right)s}\, D_1^{-r-1}\, e^{-(r+2-a_p)\frac{s}{\alpha_p}}\, e^{\frac{1-a_{p-1}}{\alpha_{p-1}}s}\, D_1^{-r-1}$$

$$\ldots\, D_1^{-r-1}\, e^{-(r+2-a_{m+1})\,\frac{s}{\alpha_{m+1}}}$$

$$\cdot\, e^{-(b_q+r)\frac{s}{\beta_q}}\, D_1^{-r-1}\, e^{\left(\frac{b_q-1}{\beta_q}\right)s}\, e^{-(r+b_{q-1})\frac{s}{\beta_{q-1}}}\, D_1^{-r-1}$$

$$\ldots\, D_1^{-r-1}\, e^{-\left(\frac{1-b_{n+1}}{\beta_{n+1}}+1\right)s}$$

$$\cdot\, e^{\left(\frac{1-a_m}{\alpha_m}\right)s}\, D_1^{r+1}\, e^{(r+a_m)\frac{s}{\alpha_m}}\, e^{\left(\frac{1-a_{m-1}}{\alpha_{m-1}}\right)s}\, D_1^{r+1}$$

$$\ldots\, D_1^{r+1}\, e^{(r+a_2)\frac{s}{\alpha_2}}$$

$$\cdot\, e^{\left(\frac{1-a_1}{\alpha_1}\right)s}\, D_1^{r+1}\, e^{(r+2-b_n)\frac{s}{\beta_n}}\, e^{(1-a_1+\alpha_1-r)\frac{s}{\alpha_1}}\, D_1^{r+1}$$

$$\ldots\, D_1^{r+1}\, e^{(r+b_1)\frac{s}{\beta_1}}$$

$$\cdot\, e^{\left(\frac{b_2-1}{\beta_2}\right)s}\, D_1^{r+1}\, e^{-\left(\frac{1-b_1}{\beta_1}-1\right)s}\, F(e^s) = f(e^{-s}), \tag{2.8}$$

जहाँ $D_1 = \frac{d}{de^s}$

(2.8) को मूल चरों में प्रत्यावर्तित करने पर हम पाते हैं

$$\lim_{r\to\infty} (-1)^{(m+n-p)(r+1)} (r!)^{p+q-2(m+n)} r^{p-m-n+\sum_1^q (b_j-\beta_j)-\sum_1^p (a_j-\alpha_j)}$$

$$\cdot s^{\left(\frac{1-a_p}{\alpha_p}-1\right)} D^{-r+1}\ s^{-\left(\frac{r+2-a_p}{\alpha_p}+\frac{1-a_{p-1}}{\alpha_{p-1}}\right)} D^{-r+1}$$

$$\ldots . D^{-r-1}\ s^{-\left(\frac{r+2-a_{m+1}}{\alpha_{m+1}}\right)}$$

$$\cdot s^{-\left(\frac{b_{q+r}}{\alpha_q}\right)} D^{-r-1}\ s^{\left(\frac{b_{q-1}}{\beta_q}-\frac{r+b_{q-1}}{\beta_{q-1}}\right)} D^{-r-1}$$

$$\ldots .. D^{r+1}\ s^{\left(-\frac{1-b_{n+1}}{\beta_{n+1}}+1+\frac{1-a_m}{\alpha_m}\right)}$$

$$\cdot D_s^{r+1}\left(\frac{a_{m+r}}{\alpha_m}+\frac{1-a_{m-1}}{\alpha_{m-1}}\right) D^{r+1} \ \ldots\ D^{r+1}\ s^{\left(\frac{a_{2+r}}{\alpha_2}+\frac{1-a_1}{\alpha_1}\right)}$$

$$\cdot D_s^{r+1}\left(\frac{r+2-b_n}{\beta_n}+\frac{1-a_1+\alpha_1-r}{\alpha_1}\right) D^{r-1} \ldots D^{r+1}\ s^{\left(\frac{r-b_1}{\beta_1}+\frac{b_2-1}{\beta_2}\right)}$$

$$\cdot D_s^{r+1}\left(\frac{b_1-1}{\beta_1}-1\right) F(s)\Big]_{s=r/y} = f(y), \tag{2.9}$$

जो अभीष्ट विलोमन संकारक है।

प्रमेय 2.1

यदि $f(y) \in L(0, \infty)$ तथा समाकल (1.1) अभिसारी हो तो s के धनात्मक मान के लिए (2.9) सत्य है।

निर्देश

1. चतुर्वेदी, वी० के० तथा गोयल, ए० एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1983, 26 (4), 283.
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि Higher Transcedental Functions, भाग I, मैकग्राहिल बुक कम्पनी, 1953.

3. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन०, **इण्डियन जर्न० प्यारे ऐप्ला० मैथ०**, 1981, **12**(2). 1394-1405.

4. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, **जर्न० आस्ट्रे० मैथ० सोसा०**, 1970, **11** (2), 142-148.

5. हिर्शमान, आई०आई०, विडर, डी०वी०, The Convolution Transform, प्रिंसटन यूनिवर्सिटी, 1955.

6. टिचमार्श, ई० सी०, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, आक्सफोर्ड, 1948.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 3, 1986

द्वितीय प्रकार के बर्नौली बहुपदियों का दो चरीय विस्तार

एस० जी० पाल

गणित विभाग, अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद

तथा

वी० एस० राय एवं एस० एन० सिंह

गणित विभाग, बनारस हिन्दूविश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जनवरी 6, 1986]

सारांश

इस प्रपत्र में दो चरों में बहुपदी सेट $A_n^{(p,q)}(x, y)$ की एक सामान्य श्रणी पर विचार किया गया है।

Abstract

A two-variable extension of Bernoulli polynomials of second kind. *By* S. G. Pal, Department of Mathematics, Avadh University, Faizabad-224001. and V. S. Rai, S. N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

In this paper, we have considered a general class of polynomial set $A_n^{(p,q)}(x, y)$ in two-variables, which can be thought of a novel extension of Bernoulli polynomials of second kind studied by different scholars so far. For this class of polynomials, several interesting results, such as recurrence relations, series form etc. have been established. It is observed that the polynomial set $A_n^{(p,q)}(x; y)$ is an Appell cross sequence.

1. भूमिका

आयलर संख्याओं का अध्ययन बाखमान[1] ने किया है। जोर्डन[2] तथा रिचार्डसन[3] ने द्वितीय प्रकार के बर्नौली बहुपदों का विस्तृत अध्ययन किया है। प्रभाकर तथा गुप्ता[4] ने द्वितीय प्रकार के

बर्नौली बहुपद का सामान्यीकरण किया है । इस बहुपद के अध्ययन से दो चरों वाले एक अधिक सामान्य श्रेणी के बहुपदी सेट $A_n^{(p,q)}(x, y)$ पर विचार किया गया जो द्वितीय प्रकार के बर्नौली बहुपदों का नवीन प्रसार प्रतीत होता है ।

2. परिभाषा

हम बहुपदी $A_n^{(p,q)}(x; y)$ को निम्नलिखित जनक सम्बन्ध के द्वारा प्रस्तावित करते हैं

$$\frac{t^{p+2q}(1+t)^x(1+t^2)^y}{\log(1+t))^p(\log(1+t^2))^q} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(p,q)}(x, y)\frac{t^n}{n!}, \tag{2.1}$$

जहाँ p तथा q अशून्य वास्तविक संख्यायें हैं ।

विशिष्ट दशायें

1. यदि हम $p=1$, $q=0$ तथा $y=0$ लें तो हमें रिओर्डन तथा रिचार्डसन[5] का ज्ञात जनक सम्बन्ध प्राप्त होगा ।

2 $q=0$ तथा $y=0$ रखने पर हमें प्रभाकर तथा गुप्ता[4] द्वारा अध्ययन किये द्वितीय प्रकार के बहुपदियों के लिये एक जनक सम्बन्ध प्राप्त होगा ।

3. पुनरावर्तन सम्बन्ध

(2.1) के दोनों सदस्यों का अवकलन आंशिक रूप से x तथा y के अनुसार करने पर हमें अन्ततोगत्वा

$$\frac{\partial}{\partial x}A_n^{(p,q)}(x; y) = n\,A_{n-1}^{(p-1,q)}(x; y),\ n \geqslant 1 \tag{3.1}$$

तथा

$$\frac{\partial}{\partial y}A_n^{(p,q)}(x; y) = n(n-1)\,A_{n-2}^{(p,q-1)}(x; y),\ n \geqslant 2. \tag{3.2}$$

प्राप्त होंगे । जनक सम्बन्ध (2.1) के हमें सरलता से

$$\sum_{n=0}^{\infty}[A_n^{(p,q)}(x+1; y) - A_n^{(p,q)}(x; y)]\frac{x^n}{n!} = \frac{t^{p+2q}(1+t)^x(1+t^2)^y}{(\log(1+t))^p(\log(1+t^2))^q}$$

प्राप्त होगा । अब परिभाषा (2.1) की सहायता से उपर्युक्त सम्बन्ध की विवेचना करने पर

$$A_n^{(p,q)}(x+1; y) = A_n^{(p,q)}(x; y) + n\,A_{n-1}^{(p,q)}(x; y) \tag{3.3}$$

इसी प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है

$$A_n^{(p,q)}(x; y+1)=A_n^{(p,q)}(x; y)+n(n-1)A_{n-2}^{(p,q)}(x; y). \quad (3.4)$$

यही नहीं, हमें (3.5) भी प्राप्त होता है।

$$A_n^{(p,q)}(x; y+1)=A_n^{(p,q)}(x+1; y)-nA_{n-1}^{(p,q)}(x; y)$$

$$+n(n-1)A_{n-2}^{(p,q)}(x; y) \quad (3.5)$$

x के स्थान पर $x+x_1$ रखने पर समीकरण (2.1) को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_S^{(p,q)}(x+x_1; y)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x_1)_n}{n!}\frac{t^n}{}\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(p,q)}(x; y)\frac{t^k}{k!}.$$

कौशी के घात श्रेणी के सिद्धान्त को व्यवहृत करने पर उपर्युक्त से

$$A_n^{(p,q)}(x+x_1; y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k^{(p,q)}(x; y)(x_1)_{n-k}. \quad (3.6)$$

प्राप्त होता है। अब (3.6) में x तथा x_1 को परस्पर परिवर्तित करने पर तथा $x_1=0$ लेने पर

$$A_n^{(p,q)}(x; y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k^{(p,q)}(0; y)_{n-k}. \quad (3.7)$$

4. श्रेणी रूप

जनक सम्बन्ध (2.1) को निम्नलिखित रूप में रखा जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(p,q)}(x; y)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(p)}(x)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}A_r^{(q)}(y)\frac{t^{2r}}{r!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{[n/2]}A_r^{(q)}(y)A_{n-2r}^{(p)}(x)\frac{t^n}{(n-2r)!\,r!} \quad (4.1)$$

दोनों पक्षों में t^n के गुणांकों को तुल्य करने पर हमें

$$A_n^{(p,q)}(x; y)=\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{n!}{r!\,(n-2r)!}A_r^{(q)}(y)A_{n-2r}^{(p)}(x) \quad (4.2)$$

प्राप्त होता है। समीकरण (4.2) दिखलाता है कि $A_n^{p,q}(x,y)$ एक बहुपदी सेट है जो x में n कोटि का है और y में $[n/2]$ कोटि का जहाँ $[n/2]$ $n/2$ में निहित सबसे बड़ी पूर्ण संख्या को बताता हैं।

प्रमेय 1

यदि p एक धनात्मक पूर्णांक हो तो

$$A_n^{(p,q)}(p+x;y)=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(n)_k A_{n-k}^{(p,q)}(x;y) \tag{4.3}$$

उपपत्ति

(2.1) के कारण हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(p,q)}(p+x;y)\frac{t^n}{n!}=\frac{t^{p+2q}(1+t)^{p+x}(1+t^2)^y}{(\log(1+t))^p(\log(1+t^2))^q}$$

$$=(1+t)^p\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p,q)}(x;y)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} t^k A_n^{(p,q)}(x;y)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} A_n^{(p,q)}(x;y)\frac{t^{n+k}}{n!}$$

प्राप्त होता है जो t^n के गुणांकों की तुलना करने पर (4.3) प्रदान करता है।

5. $A_n^{(p,q)}(x;y)$ ऐपेल अनुप्रस्थ अनुक्रम के रूप में p तथा q के लिये $p+p_1$, $q+q_1$, x तथा y के लिये (2.1) में क्रमशः $x+x_1$ तथा $y+y_1$ लिखने पर हम देखते हैं कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p+p_1,q+q_1]}(x+x_1;y+y_1)\frac{t^n}{n!}=\frac{t^{p+p_1+2(q+q_1)}(1+t)^{x+x_1}(1+t^2)^{y+y_1}}{(\log(1+t))^{p+p_1}(\log(1+t^2))^{q+q_1}},$$

जो तुरन्त ही (5.1) प्रदान करता है

$$A_n^{[p+p_1,q+q_1]}(x+x_1;y+y_1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k^{[p,q]}(x;y)A_{n-k}^{[p_1,q_1]}(x_1,y_1)\ \forall n, \tag{5.1}$$

जो समस्त $p_1\, p_1$, a, q_1 के लिये तथा किसी x, x_1, y तथा y_1 पर लागू होता है जो यह दिखलाता है कि $A_n^{[p,q]}(x;y)$ एक ऐपेल क्रास अनुक्रम है।

समीकरण (5.1) में $p=1$, $q=1$, $p_1=p_1-1$, $q_1=q-1$ रखने पर (5.2) मिलता है

$$A_n^{[p,q]}(x+x_1;y+y_1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x;y)A_{n-k}^{[p-1,q-1]}(x_1,y_1). \tag{5.2}$$

(5.2) में x, x_1 तथा y, y_1 को परस्पर बदलने पर हमें

$$A_n^{[p,q]}(x; y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}^{[p-1,q-1]}(x; y). \tag{5.3}$$

प्राप्त होता है।

निर्देश

1. बाखमान, पी०, Das Fermat problem in seiner bisherigen Entwicklung, बर्लिन तथा लीपजिग, 1919.
2. जोर्डन, सी०, Calculus of Finite differences, चेल्सिया पब्लिशिंग कं० न्यूयार्क, 1950.
3. मिल्ने-थामसन, एल० एम०, Calculus of Fnite difference, मैकमिलन एण्ड कम्पनी, 1951.
4. प्रभाकर, टी० आर० तथा शारदा गुप्ता, **इंडि० जर्न० प्योर एप्ला० मैथ०**, 1980, **11**, B61-62
5. रिचार्डसन, सी० एच०, An introduction to the Calculus of Finite differences, डी० वाननास्ट्रैंड कम्पनी न्यूयार्क, 1954.
6. रोटा, जी० सी०, काहनेर, डी० तथा औलीज्को, ए०, **जर्न० मैथ० अनालि० ऐप्लि०**, 1973, **42**, 685-760.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 3, 1986

परागोलीय श्रेणी की लघुगणकीय संकलनीयता

एस० पी० खरे

मेहता महाविद्यालय भरवारी, इलाहाबाद

तथा

एस० के० त्रिपाठी

श्री तिलक इण्टर कालेज, कनैली, इलाहाबाद

[प्राप्त—फरवरी 14, 1986]

सारांश

इस शोधपत्र में परागोलीय श्रेणी की लघुगणकीय संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध की गई है।

Abstract

Logarithmic summability of ultraspherical series. *By* S. P. Khare, Mehta College, Bharwari, Allahabad and S. K. Tripathi, Shri Tilak Intermediate College, Kanaily, Allahabad.

We prove a theorem on logarithmic summability of ultra-spherical series.

1. बोरवाइन[1] ने निम्नलिखित परिभाषा दी है। अनन्त श्रेणी $\Sigma\, a_n$ लघुगणकीय विधि से संकलनीय अथवा संकलनीय $(L)s$ में होगी, यदि x के उस मान के लिये जो अन्तराल (0, 1) में स्थित हो,

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{n}x^n=S,$$

जहाँ S_n श्रेणी Σa_n का nवाँ आंशिक संकलन है।

2. माना कि $f(\theta,\phi)$ अन्तराल $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ तथा $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ में परिभाषित है, तब गोले S पर $f(\theta,\phi)$ की परागोलीय श्रेणी निम्नलिखित है

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \iint_S \frac{f(\theta', \phi') P_n^{(\lambda)} (\cos w) \sin \theta' \, d\theta' \, d\phi'}{[\sin^2 \theta' \sin^2 (\phi-\phi')]^{1/2-\lambda}} \tag{2.1}$$

जहाँ $\cos w = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\phi - \phi')$ तथा $P_n^{(\lambda)}(x)$ परागोलीय बहुपद है।

काग्बेतलियाँ[2] ने गोले पर $f(\theta, \phi)$ के विशिष्ट मानों के अध्ययन से गोले पर $f(\theta, \phi)$ का निम्नलिखित मध्यमान परिभाषित किया है

$$f(w) = \frac{1}{2\pi (\sin w)^{2\lambda}} \int_{C_w} \frac{f(\theta', \phi') \, ds'}{[\sin^2 \theta' \sin^2 (\phi - \phi')]^{1/2-\lambda}} \tag{2.2}$$

जहाँ समाकलन गोले के ऊपर उस छोटे वृत्त के अनुगत किया गया है जिसका केन्द्र (θ, ϕ) है तथा जिसकी वक्ररेखी त्रिज्या w है।

तब श्रेणी (2.1) निम्नलिखित रूप में होगी

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \, \Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_0^{\pi} f(w) \sin w)^{2\lambda} P_n^{(\lambda)} (\cos w) \, dw$$

हम लिखेंगे कि

$$\phi(w) = \{ f(w) - f(o) \} (\sin w)^{2\lambda-1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(\frac{1}{2}) \, \Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)} \tag{2.3}$$

हम निम्नांकित प्रमेय स्थापित करेंगे :—

प्रमेय

यदि $0<\lambda<1$ तथा यदि $\int_0^{\pi} \frac{|d\phi(w)|}{(\sin w)^{\lambda}} = 0 \, (1)$, तब श्रेणी (2.1) $f(0)$ में (L) संकलनीय होगी।

3. यहाँ हम ऐसे परिणामों को लिख रहे हैं, जिनकी हमें आगे चलकर आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका[3]

यदि $\lambda>0$, तब

$$P_n^{(\lambda)} (\cos \theta) = O(n^{2\lambda-1}), \; 0 \leqslant \theta \leqslant c/n \tag{3.1}$$

तथा यदि $0<\lambda<1$, तब

$$|P_n^{(\lambda)} (\cos \theta)| = S^{1-\lambda} [\Gamma(\lambda)]^{-1} n^{\lambda-1} (\sin \theta)^{-\lambda} \text{ जहाँ } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \tag{3.2}$$

प्रमेय की उपपत्ति

यदि S_n श्रेणी (2.1) का nवाँ आंशिक संकलन हो, तब जेगो[3] के अनुसार

$$S_n=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)}\int_0^{\pi} f(w)\frac{d}{dx}\left\{P_{n+1}^{(\lambda)}(x)+P_n^{(\lambda)}(x)\right\}_{x=\cos w}.(\sin w)^{2\lambda}\,dw$$

अतः

$$S_n-f(o)=\int_0^{\pi}\phi(w)\frac{d}{dw}\left\{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)+P_n^{(\lambda)}(\cos w)\right\}dw$$

अतः

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\{S_n-f(o)\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{\pi}\phi(w)\frac{d}{dw}\left\{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)+P_n^{(\lambda)}(\cos w)\right\}dw$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\left[\phi(w)\left\{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)+P_n^{(\lambda)}(\cos w)\right\}\right]_0^{\pi}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{\pi}\left\{P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos w)+P_n^{(\lambda)}(\cos w)\right\}d\phi(w)$$

$$=I_1-I_2 \text{ (माना)}$$

अब

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\phi(\pi)\left\{P_{n+1}^{(\lambda)}(-1)+P_n^{(\lambda)}(-1)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(-1)\,\phi^n(\pi)\left[\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma 2\lambda}-\frac{\Gamma(n+1+2\lambda)}{\Gamma(n+2)\,\Gamma 2\lambda}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(-1)^n\phi(\pi)\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(2\lambda)}(1-2\lambda)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,\Theta\,(n^{2\lambda-2})$$

$$=O\left(\log\frac{1}{1-x}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } o<\lambda<1$$

तथा

$$I_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/2}\right]$$

$$=I_{2,1}+I_{2,2}+I_{2,3}\ (\text{माना})$$

अब (3.1) से

$$I_{2,1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{1/n} O(n^{2\lambda-1})(\sin w)^{\lambda}\frac{d\phi(w)}{(\sin w)^{\lambda}}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}O(n^{2\lambda-1})(n^{-\lambda})\int_0^{1/n}\frac{|d\phi(w)|}{(\sin w)^{\lambda}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}O(n^{\lambda-1})$$

$$=O\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

इसी प्रकार से

$$I_{2,3}=O\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

तथा

$$I_{2\cdot 2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\int_{1/n}^{\pi-1/n} O(\lambda^{-1})\frac{d\phi(w)}{(\sin w)^{\lambda}},\quad (3.2)\text{ से मान रखने पर}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}O(n^{\lambda-1})$$

$$=O\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

अत: I_1, I_2 का मान रखने पर

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^x}{n}\{S_n-f(o)\}=0\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

या

$$\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\{S_n - f(o)\}=0(1)$$

अतः प्रमेय स्थापित हो गयी है।

निर्देश

1. बोरवाइन, डी०, जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1958, 33, 212-220.

2. कारबेतलियां, ई०, जर्न० मैथेमेटिक्स, 1924, 3, 107-167.

3. जेगो, जी०, Orthogonal Polynomials, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 3, 1986

सान्त k-रूपान्तर के लिए विलोमन समाकल

अशित शुक्ला

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरी कालेज, जबलपुर

[प्राप्त—नवम्बर 23, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखक ने एक नवीन k-रूपान्तर

$$f(p, y)=\int_0^y x\, g(x)\, k_v(pyx)\, dx$$

को परिभाषित करते हुये इसका विलोमन दिया है।

Abstract

Inversion integral for a finite K-transform. *By* Ashit Shukla, Department of Applied Mathematics, Government Engingering College, Jabalpur.

In the paper this author has defined a new k-transform.

$$f(p, y)=\int_0^y xg(x)\, k_v(pyx)\, dx. \tag{1}$$

and have given its inversion

$$g(x)=\frac{2x^{v+2}}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p^2 \phi(p)\, I_{v-1}(px^2)\, dp. \tag{2}$$

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र में एक सान्त (परिमित) k-रूपान्तर के विलोमन समाकल को ज्ञात करने के लिये सिंह [1] द्वारा प्रयुक्त विधि का प्रयोग हुआ है।

हम y कोटि के द्वितीय प्रकार के परिवर्धित बेसेल फलन को

$$k_v(x)=\frac{\frac{1}{2}\pi\, [I_v(x)-I_v(x)]}{\sin v\pi} \tag{1.1}$$

के द्वारा परिभाषित करते हैं।

आगे निम्नलिखित परिणाम का प्रयोग किया जावेगा। निर्देश [2] (page 209, (59)) में $\mu=1$ रखने पर

$$\int_y^\infty x^{-v/2} \cdot k_v (ax^{1/2})\, dx = \frac{2}{a} y^{1-v/2} k_{v-1} (ay^{1/2}) \cdot Re\,(ay^{1/2})>0.$$

प्राप्त होता है।

सरल प्रतिस्थापन के द्वारा इसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\int_z^\infty t^{1-v} k_v (at)\, dt = \frac{z^{1-v}}{a}\, , k_{v-1} (az).$$

a के स्थान पर pz रखने पर

$$\int_z^\infty t^{1-v} \cdot k_v (pzt)\, dt = \frac{z^{-v}}{p}\, k_v (pz^2). \tag{1.2}$$

2. प्रमेय

यदि सान्त k-रूपान्तर

$$f(p, y) = \int_0^y xg(x)\, k_v (pyx)\, dx \tag{2.1}$$

तथा मेलिन-रूपान्तर

$$\phi(p) = \int_0^\infty y^{1-v} \cdot f(p, y)\, dy. \tag{2.2}$$

विद्यमान हों तो (2.1) का विलोमन समाकल (2.3) द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$g(x) = \frac{2x^{v+2}}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p^2 \phi(p)\, I_{v-1} (px^2)\, dp. \tag{2.3}$$

उपपत्ति

यहाँ पर $I_v(x)$ कोटि v का प्रथम प्रकार का परिवर्धित बेसेल फलन है। (2.3) के विलोमन समाकल का फलन $\phi(p)$ के रूप में होता है जो स्वयं एक ज्ञात फलन $f(p,y)$ का मेलिन रूपान्तर है। (2.2) में $f(p, y)$ का मान (2.1) से रखने पर हमें

$$\phi(p) = \int_0^\infty y^{1-v} \left[\int_0^y xg(x)\, k_v (pyx)\, dx \right] dy$$

प्राप्त होता है। समाकलन के क्रम को बदलने पर, जो यहाँ पर अनुमत है, हमें

$$\phi(p) = \int_0^\infty xg(x) \left[\int_0^\infty y^{1-v}\, k_v (pyx)\, dy \right] dx. \tag{2.4}$$

प्राप्त होता है। (1.2) का सम्प्रयोग करने तथा चर में उपयुक्त परिवर्तन करने पर (2.4) बदल कर

$$2p^{3/2} \phi(p) = \int_0^\infty U^{-1+\nu/2} \cdot g(U^{1/2}) \, k_\nu(pU) \, (pU)^{1/2} \, dU, \text{ जहाँ } U = X^2$$

हो जाता है। यह k-रूपान्तर का स्वरूप है अतएव निर्देश [2] की सहायता से इसका विलोमन करके एवं $U^{1/2} = x$ रखने पर हमें (2.3) मिलता है जो हमारे द्वारा प्रस्तावित विलोमन समाकल है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहाय्य एवं पथप्रदर्शन के लिये लेखक डा० सी० सिंह का आभारी है।

निर्देश

1. सिंह, सी०, Riv., Mat. Univ. Parma 1968, 9 (2), 339-341.
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग 2, मैकग्राहिल न्यूयार्क, लन्दन, 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 3, 1986

परिवर्धित लागेर बहुपद वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन

बी० के० जोशी

गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग महाविद्यालय, बिलासपुर

[प्राप्त—अगस्त 1, 1985]

सारांश

एर्डेल्यी[1] द्वारा प्रायोजित विधि का उपयोग करते हुए एक समाकल समीकरण का प्रतिलोमन प्रस्तुत किया गया है, जिसकी अष्टि परिवर्धित लागेर बहुपद है।

Abstract

An integral equation involving modified Laguere polynomial. *By* B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government Engineering College, Bilaspur. (M.P.)

Using the method suggested by Erdelyi[1] an integral equation with modified Laguerre polynomial as its kernel has been inverted.

1. कुछ समाकल समीकरणों का हल रोडरिग्स सूत्र तथा उसके सार्वीकृत स्वरूप द्वारा किया जा सकता है। इस सूत्र की मदद से समाकल समीकरण के वाम पक्ष को किसी विशेष क्रम के अवकलन के रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार से लिखे स्वरूप को बारम्बार समाकलित करने पर समाकल समीकरण का हल प्रस्तुत किया जाता है। एर्डेल्यी[1] द्वारा सर्वप्रथम लेगेन्ड्र बहुपदी अष्टि वाले समाकल समीकरण का हल प्रस्तुत करने के लिए इस विधि को प्रकाश में लाया गया। श्रीवास्तव[6] ने विशिष्ट द्विपद समाकल समीकरणों को इसी प्रकार के एकल समीकरण में बदला जिसका हल उपर्युक्त विधि द्वारा सम्भव है। इसी दशा में रूसिया[5] द्वारा जेकोबी बहुपदी अष्टि वाले समाकल समीकरण हेतु प्रयास किया गया। जोशी[3,4] ने सार्वीकृत वेटमान फलन तथा राइसेज बहुपदी को अष्टि के रूप में प्रयुक्त कर इस विधि से हल प्रस्तुत किया।

हाल ही में गोयल[2] ने परिवर्धित लागेर बहुपद को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया

$$L^{(x)}_{a,\,b,\,m,\,n}=\frac{x^{1-m}b^{n}}{n\,!}\exp\left(\frac{ax}{b}\right)D^{n}\left[x^{m+n-1}\exp\left(-\frac{ax}{b}\right)\right] \tag{1.1}$$

इस शोधपत्र का उद्देश्य ऐसे समाकल समीकरण का प्रतिलोमन करना है जिसकी अष्टि $L^{(x)}_{a,\,b,\,m,\,n}$ हो।

2. प्रमेय

यदि a, b, m और n धनात्मक पूर्णांक हों तो समाकल समीकरण

$$\int_1^x (x-y)^{m-1}\, L^{(x-y)}_{a,\,b,\,m,\,n}\, g(y)\, dy = f(x) \tag{2.1}$$

का हल

$$g(x) = \frac{n}{(m+n-1)}\, D^{m+n} \int_1^x \exp\,(x-u)\, f(u)\, du \tag{2.2}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

उपपत्ति

समीकरण (2.1) के दोनों पक्षों में $\exp\left(\frac{-ax}{b}\right)$ का गुणा करने, (1.1) का उपयोग करने तथा बारम्बार समाकलित करने पर हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$\int_1^x (x-y)^{m+n-1} g(y)\, dy = n \int_1^x \exp\left(\frac{a}{b}\,\overline{x-u}\right) f(u)\, du$$

अब उपर्युक्त को $(m+n)$ बार अवकलित करने पर हमें (2.2) की प्राप्ति होती है।

प्राचलों के विशिष्टीकरण से (2.1) के विभिन्न रूपों में हल प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी ए०, अमे० मैथ० मन्थली, 1963, **70**, 651.
2. गोयल, जी० के०, विज्ञान परि०अनु० पत्रिका, 1983, **26** (3), 263.
3. जोशी, बी० के० , मैथ० स्टूडेंट, 1974, **42** (2), 183.
4. जोशी, बी० के० प्रोसी० नेश० एके० साइन्सेज इन्डिया, 1974, **44** (4), 254.
5. रूसिया, के० सी०, प्रोसी० नेश० एके० साइन्सेज इन्डिया, 1969, **39** (3), 334.
6. श्रीवास्तव, के० एन०, जर्न० इन्डि० मैथ० सोसा०, 1965, **29**, 1.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 3, 1986

मिश्रित लिगैंड संकुलों के विलयन स्थायित्व : लैंथेनाइड ई डी टी ए (O-N/O-S) दाता त्र्यंगी तन्त्र

एस० एन० लिमये तथा एम० सी० सक्सेना
रसायन विभाग, डा० हरी सिंह गौड विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—मई 31, 1984]

सारांश

निश्चित ताप पर मिश्रित लिगैंड संकुलों के विलयन स्थायित्वों की तुलना के लिए दो नवीन स्थायित्व प्राचलों %RS तथा %RA का वर्णन किया गया है। अध्ययन के लिए जो त्र्यंगी तंत्र चुने गये वे (LN-EDTA-L) प्रकार के थे जिनमें $LN^{3+}=La^{+3}$, Ce^{3+}, Pr^{3+}, Nd^{3+} या Sn^{+3} है तथा L=(O-N) (ऐमीनो अम्ल) तथा (O-S) (थायोमैलिक तथा थायोग्लाइकोलिक अम्ल) दाता लिगैंड हैं।

Abstract

Relative stabilisation and relative astatisticality parameters for comparing solution stabilities of mixed ligand complexes : Lanthanida-EDTA-(O-N/O-S) donor ternary systems. *By* S. N. Limaye and M. C. Saxena, Department of Chemistry, Dr. Harisingh Gour Vishwavidyalaya, Sagar, (M. P.).

The present work describes the use of two new stability parameters viz., (%) Relative stabilisation and (%) Relative Astatisticality for comparing the solution stabilities (determination and other aspects of log K values reported elsewhere) of mixed-ligand complexes at a given temperature. The ternary systems chosen for study are of the type (LN-edta-L), where $LN^{3+}=La^{3+}$, Ce^{3+}, Pr^{3+}, Nd^{3+} or Sm^{3+} and L=(ON) donor ligands (amino acids viz., glycine, $\alpha.\beta$-alanine, valine, leucine, aspartic acid or anthranilic acid) and (O-S) donor ligands (viz., thiomalic and thioglycolic acid).

मिश्रित लिगैंडों के विषय में प्रचुर शोध कार्य हो चुका है [1–9]

इस अध्ययन के लिए जो त्र्यंगी तंत्र चुने गये वे LN-EDTA-L प्रकार के थे जिनमें $LN^{+3}=La^{+3}$, Ce^{3+}, Pr^{+3}, Nd^{+3}, या Sm^{+3} है तथा L=(ON) तथा (OS) दाता लिगैंड है।

प्रयोगात्मक

25°C पर 1 : 1 : 1 त्र्यंगी (LN-EDTA-L) तथा संगत 1 : 1 द्वयंगी (LN-L) संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक एवं I=0.2 (mole dm^{-3} of $NaClO_4$) की आयनिक शक्ति ज्ञात करने के लिये

इर्विंग-रोजोटी की पी-एच अनुमापन विधि[10] तथा भट्टाचार्य द्वारा प्रस्तावित[11] विधियों का प्रयोग किया गया। वैद्युत स्थैतिक तथा सांख्यिकीय कारकों के प्रभावों के मान संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक आँकड़ों की तुलना द्वारा प्राप्त किये गये।

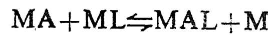
परिणाम तथा विवेचना

त्र्यंगी संकुलों का निर्माण $M+A \rightleftharpoons MA$; $MA+L \rightleftharpoons MAL$, $(A=EDTA)$ साम्यावस्था के अनुसार अग्रसर होता है। द्वयंगी संकुल MA, ML की अपेक्षा अधिक स्थायी है अतएव किसी लिगैंड विस्थापन की सम्भावना, जो $MA+L \rightleftharpoons ML+A$ प्रकार की हो समाप्त हो जाती है। EDTA की षटदंतुर प्रकृति के कारण MA_2 प्रजाति के बनने या MAL का MA_2 तथा ML_2 में रूपान्तरित होने की सम्भावना कम हो जाती है। n/[L] vs [L] के मध्य प्राप्त आलेखों से यह परीक्षा की गई कि बहुनाभिकीय स्पीसीज के निर्माण की उपेक्षा की जा सकती है। आवश्यकतानुसार जल-अपघटन संशोधनों[12] को प्रयुक्त किया गया है।

किसी विशिष्ट त्र्यंगी संकुल MAL का स्थायित्व द्वयंगी संकुल ML के संगत होता है। इसे सामान्यतया $\triangle \log K$ के रूप में लिखा जाता है जिसे निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है

$$\triangle \log K=\left(\log K^{MA}_{MAL}-\log K^{M}_{ML}\right)=\left(\log K^{ML}_{MLA}-\log K^{M}_{MA}\right)$$

जहाँ पदों का उनका प्रचलित अभिप्राय है। गणितीय विधि से $\triangle \log K$ को निम्नलिखित अभिक्रिया का साम्यावस्था स्थिरांक माना जा सकता है



$$MA+ML \rightleftharpoons MAL+M$$

सारणी 1 में प्रस्तुत प्रपत्र में अध्ययन किये गये मिश्रित-लिगैंड संकुलों के $\triangle \log K$ मान दिये गये हैं। किन्तु इन मानों को विभिन्न त्र्यंगी संकुलों के सापेक्ष स्थायित्वों की तुलना के लिए इस्तेमाल नहीं किया जा सकता क्योंकि वे संगत $\log K^{M}_{ML}$ मानों पर निर्भर करते हैं। इस हेतु हमने त्र्यंगी[3] संकुलों के लिए एक प्राचल % सापेक्ष स्थायीकरण (R. S.) को प्रस्तावना की है जो निम्न प्रकार है

$$(R.\ S.)=\left[\left(\log K^{MA}_{MAL}-\log K^{M}_{ML}\right) / \log K^{M}_{ML}\right] X\ 100.$$

R. S. के मान (%) सारणी 1 में दिये गये हैं। प्रस्तुत दशा में ये मान ऋणात्मक हैं क्योंकि त्र्यंगी संकुलों के निर्माण में वैद्युतस्थैतिक विकर्षण निहित रहता है। R. S. के उच्च मान त्र्यंगी संकुलों के न्यूनतर स्थायीकरण के सूचक हैं। सिगेल[14] ने कतिपय त्र्यंगी संकुलों के लिए $\triangle \log K$ की निर्भरता लिगैंड क्षारीयता पर देखी है। प्रस्तुत अध्ययन में R. S. (%) की मात्रा द्वितीयक लिगैंडों (यथा ऐमीनो अम्लों के लिए, चित्र 1) की लिगैंड क्षारीयता $\left(\log B^{H}_{H_n} L\right)$ के साथ सरल रूप से विचरण करती है।

सारणी 1

मिश्रित लैंथेनाइड संकुलों का आपेक्षिक स्थायित्व

I=0.2 mole dm^{-3} $NaClO_4$ ताप 25° C.

द्वितीयक लिगैंड	गुणधर्म	La^{3+}	Ce^{3+}	Pr^{3+}	Nd^{3+}	Sm^{3+}
O-N दाता						
ग्लाइसीन	$-\Delta$ log K	1.23	1.06	0.92	0.79	0.87
	$-$(%) R. S.	23.12	19.70	16.58	15.67	14.85
α-ऐलानीन	$-\Delta$ log K	1.54	1.63	1.37	1.35	1.31
	$-$(%) R. S.	26.46	27.03	21.54	20.70	19.61
β-ऐलानीन	$-\Delta$ log K	0.87	1.53	1.59	1.52	1.31
	$-$(%) R. S.	16.73	25.95	26.15	24.36	22.03
वैलीन	$-\Delta$ log K	0.84	0.72	0.83	0.66	0.63
	$-$(%)R. S.	14.14	11.90	13.21	10.21	9.43
ल्यूसीन	$-\Delta$ log K	1.30	1.25	1.27	1.09	1.09
	$-$(%) R. S.	23.17	21.40	21.16	18.07	17.69
ऐस्पार्टिक अम्ल	$-\Delta$ log K	1.06	1.06	0.99	1.06	0.79
	$-$(%) R. S.	18.89	18.37	16.78	17,55	12.85
ऐन्थानिलिक अम्ल	$-\Delta$ log K	0.09	0.20	0.50	0.10	0.15
	$-$(%) R. S.	4.3	8.16	17.24	3.27	4.46
O-S दाता						
थायोमैलिक अम्ल	$-\Delta$ log K	0.25	0.14	0.11	0.04	0.27
	$-$(%) R. S.	5.83	3.17	2.47	0.80	5.9
थायोग्लाइकोलिक अम्ल	$-\Delta$ log K	0.08	0.05	0.06	0.04	0.04
	$-$(%) R. S.	1.35	1.42	1.70	1.10	1.08

सारणी 2

मिश्रित लेंथेनाइड संकुलों के निर्माण में आपेक्षिक असांख्यिकीयता

I=0.2 mole dm^{-3} (Na ClO_4) ताप 25° C.

द्वितीयक लिगैंड	गुणधर्म	La^{3+}	Ce^{+3}	Pr^{3+}	Nd^{3+}	Sm^{3+}
O-N दाता						
ग्लाइसीन	log K_s	9.98	10.27	10.49	10.82	11.10
	(%) R. A.	59.0	59.29	59.68	54.80	54.32
α-ऐलानीन	log K_s	10.11	10.38	10.70	11.03	11.31
	(%) R. A.	57.66	57.61	53.36	53.12	52.25
β-ऐलानीन	log R_s	9.95	10.34	10.63	10.96	11.23
	(%) R. A.	56.48	57.73	57.76	65.93	55.55
वैलीन	log K_s	10.14	10.38	10.68	11.03	11.24
	(%) R. A.	49.25	48.68	48.97	46.87	46.17
ल्यूसीन	log K_s	10.05	10.33	10.53	10.91	11.19
	(%) R. A.	57.11	55.66	55.18	54.90	54.51
ऐस्पार्टिक अम्ल	log K_s	10.05	10.31	10.65	10.91	11.18
	(%) R. A.	54.73	54.32	53.50	54.35	51.92
ऐन्थानिलिक अम्ल	log K_s	9.16	9.48	9.84	10.16	10.48
	(%) R. A.	78.62	76.26	75.60	69.68	69.6
O-S दाता						
थायोमैलिक अम्ल	log K_s	9.72	9.97	10.22	10.54	10.85
	(%) R. A.	58.43	57.17	57.53	57.11	57.97
थायोग्लाइकोलिक अम्ल						
	log K_s	9.50	9.75	10.00	10.32	10.57
	(%) R. A.	64.21	63.89	64.10	64.23	64.80

मिश्रित संकुलों के सांख्यिकीय स्थायित्व स्थिरांकों[15] की भी गणना यह मान कर की गई है कि लैन्थैनाइड धातु आयन अष्ट उपसहसंयोजी, प्राथमिक लिगैंड (EDTA) षटदंतुर तथा द्वितीयक लिगैंड द्विदन्तुर हैं। ये मान ($\log K_s$) सारणी 2 में अंकित है।

यह देखा जा सकता है कि $\log K_s$ के मान $\log K^{MA}_{MA_2}$ के मानों से बड़े हैं जो "सांख्यिकीय कारकों" के सन्निहित होने को सूचित करता है—यथा वैद्युतस्थैतिक प्रभाव, एन्ट्रापी प्रभाव, स्टेरिक प्रभाव, कीलेट वलयों का आकार, लिगैंड क्षेत्र की असंमिति आदि जिन्हें एक अन्य प्राचल सापेक्ष असांख्यिकीयता' (%R. A.) के रूप में व्यक्त किया जाता है। %R. A. को निम्न रूप में परिभाषित किया जा सकता है

$$(\%)\ \mathrm{R.\ A.} = \left[\left(\log K_s - \log K^{MA}_{MAL}\right) / \log K_s\right] \times 100.$$

%RA के मान धनात्मक हैं (सारणी 2)। ये मान उच्च हैं और यह बतलाते हैं कि अध्ययनगत मिश्रित संकुलों के स्थायित्व को कम करने में सांख्यिकीय कारक हाथ बटाते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय सागर विश्वविद्यालय के रसायन विभाग के अध्यक्ष प्रो० वाई० जी० खरे के प्रति आवश्यक सुविधायें प्रदान करने के लिये आभार व्यक्त करते हैं। एक लेखक (सक्सेना) म० प्र० कौंसिल आफ साइंस एवं टेक्नालाजी द्वारा शोध अनुदान प्रदान करने के लिये आभारी है।

निर्देश

1. मार्कुस, वाई०, Bull. Res. Council Israel, 1961, **10A**, 2, 3.
2. मार्कुस, वाई० तथा एलिजर, आई०, J. Phys. Chem., 1962, **66**, 1661.
3. कीडा, एस०, Bull.Chem. Soc. Japan, 1956, **29**, 805.
4. वही, Bull. Chem. Soc., Japan, 1961, **34**, 962.
5. डेविट, आर० तथा वाल्टर्स, जे०, J. Amer. Chem. Soc., 1954, **76**, 3810.
6. भट्टाचार्य, पी० के०, J. Sci. Ind. Res., 1981, **40**. 382.
7. जेरम, जे०, Metal-Amine formation in aqueous solutions. कोपेनहागेन, 1941, अध्याय IV.
8. लिमये, एस० एन० तथा सक्सेना, एम० सी०, J. Indian Chem. Soc. (स्वीकृत)

9. वही, J. Inst. Chem. (India), (स्वीकृत), 1983.

10. इर्विंग, एच० एम० तथा रोसोटी, एच० एस०, J. Chem., Soc., 1953, 3397; 1954, 2904.

11. चिदम्बरम, एम० पी० तथा भट्टाचार्य, पी० के०, J. Inorg. Nuclear Chem., **1970, 39,** 2471.

12. तेजुर्कर, सी० आर० तथा भट्टाचार्य, पी० के०, Indian J. Chem., 1975, **13** (6), 622.

13. लिमये, एस० एन० तथा सक्सेना, एम० सी०, J. Nat. Acad. Sci. (India). (स्वीकृत)

14. सिगेल, एच० इत्यादि, Inorg. Nuclear Chem. Lett.. 1968, **4**, 443. J. Inorg. Nuclear Chem., 1975, **37**, 507.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 29, No. 3, 1986

पृथक्करणीय बानाख समिष्ट में मापों का अभिसरण

ए० आर० चौरसिया

जी० आर० मेडिकल कालेज, ग्वालियर (म० प्र०)

[प्राप्त—जुलाई 24, 1984]

सारांश

इस प्रपत्र का उद्देश्य वैद्य के प्रमेय के विलोम को सिद्ध करना एवं कतिपय संगत परिणाम देना है।

Abstract

Convergence of measure in separable Banach space. *By* A. R. Chaurasia, Lecture G. P. Medical College, Gwalior-2 (M. P.).

The aim of the paper is to prove the converse of a theorem by Vaidya and to give some allied results.

माना कि B एक पृथक्करणीय बानाख समिष्ट है तथा $\{\mu_n\}$ इस पर परिबद्ध परिमापों का अनुक्रम है। माना कि C B पर असली मान वाले परिबद्ध संतत फलन की एक वर्ग है और यह कल्पना करते हैं कि B ऐसा है कि इसका संयुग्मी B^* प्रबल अर्थ में पृथक्करणीय है। B पर समष्टि के परिमापों को M द्वारा प्रदर्शित करते हैं। वैद्य[2] के दुर्बल अभिसरण की परिभाषा इस प्रकार दी है।

1.1. परिभाषा

$\{\mu_n\}$ दुर्बल अर्थ में μ में अभिसरण करता है यदि समस्त रैखिक फलनीय $\varphi(x)$, $x \in B$ तथा समस्त बद्ध संतत फलनों f के लिये तो हम प्राप्त करते हैं

$$\int_B f(\varphi)(x))\, d\mu_n \to \int_B f(\varphi)(x))\, d\mu$$

तथा हम $\mu_n \overset{*}{\to} \mu$. लिखते हैं।

वैद्य[2] ने निम्नलिखित प्रमेय को भी सिद्ध किया है।

1.1 प्रमेय

माना कि $N \subset M\ B$ पर परिवद्ध परिणामों का एक परिवार है । तब कोई $\{\mu_n\} \in N$ अपेक्षतया B में क्षीण रूप में संहृत है यदि

(i) N समान रूप से परिबद्ध हो

(ii) प्रत्येक $\epsilon > 0$, के लिये एक ऐसा परिबद्ध समुच्चय S_ϵ विद्यमान है कि $\mu(B - S_\epsilon) < \epsilon$ समस्त $\mu \in N$. के लिये

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य वैद्य के उपर्युक्त प्रमेय का विलोम सिद्ध करना है और कतिपय संगत परिणाम प्रस्तुत करना है ।

प्रमेयिका 1.1

माना कि $\mu_n \overset{*}{\Rightarrow} \mu$. तो किसी संवृत सम्मुच्य $S \in B$ के लिये, जिससे कि $\mu(S) = \mu(\bar{S})$ जहाँ $\bar{S}$ S का संवरक है ।

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \mu_n(S) \leqq \mu(S).$$

उपपत्ति

माना कि $Rs\ \epsilon > 0$ तथा एक संवृत सम्मुच्चय F और एक विवृत समुच्चय H इस प्रकार चुना कि

$$H \supseteq \bar{S} \supseteq S \supseteq F$$

$$\mu(H - F) \leqq \epsilon$$

माना कि h तथा f संतत फलन हैं जिनमें

$$0 \geqq f(\varphi(x)) \geqq 1,\ 0 \leqq h(\varphi(x)) \leqq 1,\ x \in B$$

तथा

$$h(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \notin S \end{cases},\ f(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & x \notin S \\ 1, & x \in H \end{cases}$$

तो

$$\mu(H) \geqq \int_B f(\varphi(x))\, d\mu\mu \geqq (\bar{S})\mu \geqq (S) \geqq \int_B h(\varphi\, x))\, d\,\mu \geqq \mu(F)$$

$$\Rightarrow \epsilon \geqq \mu(H - F) \geqq \int_B \{f(\varphi(x)) - h(\varphi(x))\}\, d\,\mu \geqq \mu(\bar{S}) - \mu(S).$$

फलस्वरूप

$$\int_B f(\varphi(x))\, d\mu_n \geqq \mu_n(S) \geqq \int_B h(\varphi(x))\, d\mu_n$$

$$\int_B h(\varphi(x))\, d\mu + \epsilon \geqq \int_B f(\varphi(x))\, d\mu \geqq (S) \geqq \int_B h(\varphi(x))\, d\mu$$

जिसका अर्थ होता है कि

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu_n(S) \leqq \mu(S)$$

तथा उपप्रमेय सिद्ध हो गया।

इस तरह हमें प्रमेय 1.1 का विलोम प्राप्त होता है।

प्रमेय 1.2

यदि कोई $\{\mu_n\} \epsilon N \subset M$ अपेक्षतया B में संहृत हो तो

(i) N समानरूप से परिबद्ध है,

(ii) प्रत्येक $\epsilon > 0$, के लिये एक बद्ध समुच्चय S_ϵ विद्यमान होता है, जिससे कि

$$\mu_\epsilon (B - S_\epsilon) < \epsilon \text{ समस्त } \mu \;\epsilon\; N \text{ के लिये}$$

उपपत्ति

प्रमेय 3 उपप्रमेय 3 [1, pp. 156] से N को समान रूप से परिवद्धता निकलती है।

चूंकि B पृथक्करणीय है, अतएव इसे l/r त्रिज्या के विवृत गोलों के संमेल द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। अर्थात्

$$B = U_{j=1}^{\infty} S_{rj}$$

हम यह दावा करते हैं कि किसी $\delta > 0$ के लिये एक ऐसा पूर्णांक k_r है कि

$$\mu_r (B - U_{j=1}^{kr} S_{rj}) < \delta.$$

माना कि यह सत्य नहीं है तब एक $\delta_0 > 0$ होगा और $n_1, n_2, \ldots$ तथा $k_1, k_2, \ldots$ पूर्णांकों का एक ऐसा अनुक्रम होगा कि

$$\mu_n (B - U_{j=1}^{kr} S_{rj}) \geqq \delta_0,\; m = 1, 2, \ldots .$$

किसी स्थिर p के लिये

$$\bigcup_{j=1}^{kp} S_{rj} \subset \bigcup_{j=1}^{km} S_{rj} \quad m>p \text{ के लिए}$$

अतएव

$$\mu_n(B-\bigcup_{j=1}^{kp} S_{rj}) \geqq \mu_n(B-\bigcup_{j=1}^{km} S_{rj})>\delta_0, \quad m>p.$$

चूँकि $\mu_n \overset{*}{\Rightarrow} u$, $\bigcup_{j=1}^{kp} S_{rj}$ विवृत है अतएव $(B-\bigcup_{j=1}^{kp} S_{rj})$ संवृत है

$$\mu\,(B-\bigcup_{j=1}^{kp} S_{rj}) \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu_n\,(B-\bigcup_{j=1}^{kp} S_{rj}) \geqq \delta_0>0.$$

$p\to\infty$ मानने पर

$$\mu\,(B-B)=\mu\,(\Phi) \geqq \delta_0>0.$$

जो विरोधाभास है। अतएव हमारा दावा ठीक है। अब हम r को स्थिर करके $\delta=\epsilon/2^r$ रखते हैं और k_r को ऐसा चुनते हैं कि

$$\mu_n\,(B-\bigcup_{j=1}^{kr} S_{rj})=\epsilon/2^r.$$

हम इसे प्रत्येक r के लिये करते हैं और

$$D_r=\bigcup_{j=1}^{kr} S_{rj}$$

$$S_\epsilon=\bigcap_{r=1}^{\infty} D_r.$$

रखें तो

$$\mu_n\,(B-S_\epsilon)<\epsilon$$

जिसका अर्थ है कि

$$\mu\,(B-S_\epsilon)<\epsilon.$$

माना कि B प्रायिकता परिमापों का परिवार P है और उस पर दूरी फलन P है। तब हमें प्रमेय 1.3 प्राप्त होता है।

प्रमेय 1.3

B पर प्रत्येक प्रायिकता परिमाप $p \in P$ अपेक्षतया दुर्बल अर्थ में संहत है।

उपपत्ति

चूँकि B पृथक्करणीय है अतएव

$$B = U_{j=1}^{\infty} S_{rj}$$

जहाँ S_{rj} l/r त्रिज्या के विवृत गोले हैं। J_0 को ऐसा चुनो कि

$$p\ (U_{j<j_0} S_{rj}) = 1 - \epsilon/2^r$$

तथा

$$S_\epsilon = \cap_{r \geqq 1} U_{j \leqq j_r} S_{rj}.$$

तब S_ϵ परिबद्ध है तथा

$$p\ (S_\epsilon) \geqq 1 - \epsilon$$

जिससे प्रमेय सिद्ध हो जाता है क्योंकि प्रत्येक प्रायिकता परिमाप 1 द्वारा बद्ध है।

प्रमेय 1.4

B पर P अपेक्षतया दुर्बल अर्थ में संहत है यदि कोई $x_\epsilon \in B$ ऐसा हो कि

(i) P समान रूप से परिबद्ध है

(ii) $\lim_n Sup\ p_n \{x : \rho\ (x, x_\epsilon) \geqq \epsilon\} < n,\ p_n \in P$

(iii) $Sup\ p_n \{x : \rho\ (x, x_\epsilon) \geqq \epsilon\} < n,\ p_n \in P$

उपपत्ति

ध्यान दें कि (ii) तथा (ii') प्रमेय 3 के द्वारा समतुल्य है। सर्वप्रथम P को अपेक्षतया संहत होने दें तथा $\{p_n\}$ को इस पर एक अभिसारी अनुक्रम होने दें। तब किसी दिये हुये $n > 0$ के लिये हम एक ऐसा परिबद्ध समुच्चय $S \in B$ प्राप्त कर सकेंगे कि $p\ (S) \geqq 1 - n$ या समतुल्यत : $p\ (B - S) < n, \epsilon > 0$ तथा $x_\epsilon \in B$ का चुनाव ऐसा करें कि

$$S \subset \{x : \rho\ (x, x_\epsilon) < \epsilon\}$$

तथा आवश्यकता बनी रहती है क्योंकि P की एकसमान परिबद्धता स्पष्ट है।

विलोमत: माना कि (i) तथा (ii) सत्य है तथा समुच्चय

$$S_k = \{x : \rho\ (x, x_k) = 1/k\},\ x_k \in B.$$

तो

$$P_n\ (S_k) \geqq 1 - \epsilon/2^{k+1} \text{ समस्त } \eta \text{ के लिये}$$

$S = \cap_{k=1}^{\infty} S_k$ रखें तो S बद्ध है तथा

$$p_n\ (S) \geqq 1 - \eta$$

एवं प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० बी० एम० अग्रवाल के प्रति सुझावों तथा मार्ग दर्शन के लिये कृतज्ञता व्यक्त करता है।

निर्देश

1. लुस्टरनिक, एल० ए० तथा सोबोलेवा, वी० जे०, Elements of functional analysis हिन्दुस्तान पब्लिशिंग हाउस, नई दिल्ली , 1974.
2. वैद्य, एम० एम०, Sankhya 'A' 1968, **30**, 404-409.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 29, No. 3, 1986

ब्रोमीन के साथ फुरोइक अम्ल की अन्तःक्रिया का गतिज अध्ययन

सत्येन्द्र सिंह, पी० चन्द तथा के० एल० यादव

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अगस्त 4, 1984]

सारांश

H^+ तथा Br^- की उपस्थिति में फुरोइक अम्ल के ब्रोमीनीकरण का गतिज अध्ययन विद्युतमापी विधि से किया गया। Br_2 तथा Br_3^- प्रजातियों के ब्रोमीनीकरण के विशिष्ट दर स्थिरांक ज्ञात किये गया। सक्रियकरण की ऊर्जा तथा एन्ट्रापी का भी परिगणन किया गया।

Abstract

Kinetic study of the interaction of furoic acid with bromine. *By* Satyendra Singh, P. Chand and K. L. Yadava, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Kinetics of bromination of furoic acid has been studied electrometrically in the presence of H^+ and Br^-. Specific rate constants for the bromination of the species Br_2 and Br_3^- have been determined. Energy and entropy of activation have also been calculated.

किसी भी यौगिक का ब्रोमीनीकरण Br_2 तथा Br^-_3 के माध्यम से घटित होता है। यद्यपि फुरोइक अम्ल असली ऐरोमैटिक यौगिक नहीं है किन्तु यह ऐरोमैटिक यौगिक की तरह बहुत कुछ आचरण पर्दशित करता है।[1] जनक यौगिक फ्यूरान अत्यन्त अस्थाई होने के कारण क्रियशील प्रजातियों के द्वारा टूट जाता है, इसमें ऋणात्मक—COOH समूह की उपस्थिति आक्सीजन के पार्श्व में होने से वलय संरचना को स्थायित्व प्राप्त होता है। ऐसी सूचना प्राप्त है[2] कि जलीय माध्यम में ब्रोमीनीकरण से इस अम्ल में 5-स्थिति पर प्रतिस्थापन होता है।

प्रयोगात्मक

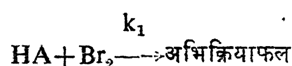
फुरोइक अम्ल के अतिरिक्त अन्य पदार्थों का विवरण अन्यत्र दिया जा चुका है[3]। फुरोइक अम्ल (गलनांक=132 °C, क्वथनांक=231 °C) को कार्बन टेट्राक्लोराइड में से पुनः क्रिस्टलित करके शुद्ध

बनाया गया। इसका संग्रह विलय पुनः आसवित जल में तैयार किया गया जो $1.06 \times 10^{-2}M$ था। अभिक्रिया मिश्रण में ब्रोमीन की सान्द्रता 10^{6}–M रखी गई। हर प्रयोग तीन बार किया गया। इससे ±5% के भीतर परिशुद्धता प्राप्त हुई।

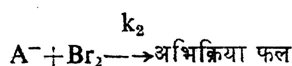
परिणाम तथा विवेचना

ये अध्ययन फुरोइक अम्ल, H^+ तथा Br^- की विभिन्न सान्द्रताओं पर सम्पन्न किये गये। फुरोइक अम्ल की सान्द्रता को ब्रोमीन की तुलना में लगभग 100 गुना अधिक रखा गया जिससे विलगाव प्रविधि प्रयुक्त की जा सके। ब्रोमाइड आयन सान्द्रता 0.1 M तथा 0.3 M के बीच रखी गई जो प्रयुक्त ब्रोमीन की सान्द्रता से बहुत अधिक है अतएव पूरी ब्रोमीनीकरण क्रिया के दौरान ब्रोमाइड सान्द्रता स्थिर रही। फलस्वरूप ब्रोमाइड इलेक्ट्रोड के ऊपर का विभव स्थिर रहता है और यह निर्देश इलेक्ट्रोड की भाँति कार्य करता है। विभव में जो पतन होता है वह समय के साथ ब्रोमीन सान्द्रता में ह्रास के कारण है। विभव के विपक्ष काल का आरेख खींचने पर सरल रेखा प्राप्त होती है जिससे प्रथम कोटिक ब्रोमीन के उपभोग का पता चलता है। सरल रेखा पर का ढाल[5] $RT/2F \cdot [S] \cdot k$ के तुल्य है जहाँ k आभासी विशिष्ट दर स्थिरांक है और [s] सबस्ट्रेट की सान्द्रता है। इस सम्बन्ध से आभासी विशिष्ट दर स्थिरांक k की गणना की जा सकती है। यह भी पता चलता है कि आभासी दरें फुरोइक अम्ल की सान्द्रता के प्रत्यक्ष समानुपाती हैं। इससे यह भी पता चलता है कि ब्रोमीनीकरण की कोटि भी फुरोइक अम्ल के प्रति इकाई है। सारणी 1 तथा 2 से ब्रोमीनीकरण का H^+ तथा Br^- दोनों पर आश्रित होना प्रदर्शित होता है।

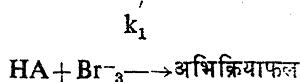
द्विअणुकविशिष्ट दर स्थिरांक k एक संयुक्त प्राचल हो सकता है जो आणविक ब्रोमीन तथा ट्राइब्रोमाइड आयन की सक्रियता योगदान के कारण हो सकता है[6–8]। आयनीकृत फुरोइक अम्ल (AH) तथा फुरोएट आयन (A^-) के साथ दो ब्रोमीनीकारक प्रजातियों के लिये निम्नलिखित द्विअणुक विशिष्ट दर स्थिरांक मानने पर :



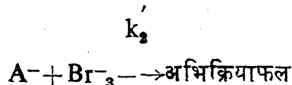
$$HA + Br_2 \xrightarrow{k_1} \text{अभिक्रियाफल}$$



$$A^- + Br_2 \xrightarrow{k_2} \text{अभिक्रिया फल}$$



$$HA + Br_3^- \xrightarrow{k_1'} \text{अभिक्रियाफल}$$



$$A^- + Br_3^- \xrightarrow{k_2'} \text{अभिक्रियाफल}$$

आभासी विशिष्ट दर स्थिरांक k को व्युत्पन्न किया जा सकता है[5]

$$k=\left\{(k_1+k_1' k_E[Br^-])+K_C (k_2+k_2' K_E[Br^-])\right\} (1+K_E[Br^-]) \qquad (1)$$

जहाँ $K_E Br_2+Br^- + \bar{Br_3}$ का साम्य स्थिरांक है तथा K_C साम्यावस्था $HA \overset{K_C}{\rightleftharpoons} H^+ + A^-$ का वियोजन स्थिरांक है ।

समीकरण (1) का उपयोग $k_1 k_1'$, k_2 तथा k_2' के परिगणन हेतु किया जा सकता है जो फुरोइक अम्ल तथा फुरोएट आयन के ब्रोमीनीकरण के लाक्षणिक गतिज प्राचल हैं । 20°, 25° तथा 30° पर K_E के मान क्रमशः 17.4, 16.7 तथा 16.0 प्राप्त हुए (स्केफ के प्रयोग फलों से)।[9] K_C के मानों का परिगण किया गया तो वे क्रमशः 15.34×10^{-4}, 15.41×10^{-4} तथा 15.56×10^{-4} मिले[10,11] ।

समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप प्रदान किया जा सकता है

$$k(1+K_E[Br])=k_1+k_1' K_E[Br^-]+K_C (k_2+k_2' K_E[Br^-]) / [H^+] \qquad (2)$$

इसके आधार पर फुरोइक अम्ल के ब्रोमीनीकरण के लिये k_1, k_1' तथा k_2 के मान प्राप्त किये गये जो सारणी 3 में अंकित हैं ।

सारणी 4 में सक्रियकरण ऊर्जा तथा एन्थैल्पी के मान दिये हुये हैं जिन्हें परिवर्धित आ रही नियस समीकरण

$$\log k=\log A-E/2.303\ RT \qquad (3)$$

तथा परम अभिक्रिया दर सिद्धान्त

$$k=\frac{KT}{h} \cdot e^{\Delta S/R} \cdot e^{-E/RT} \qquad (4)$$

की सहायता से परिगणित किया गया ।

सारणी 3-4 से पता चलता है कि ट्राइब्रोमाइड आयन ब्रोमीन अणु की अपेक्षा कम प्रभावशाली ब्रोमीनीकारक है । सारणी 4 से स्पष्ट है कि अणुक ब्रोमीन की सक्रियकरण ऊर्जा Br^-_3 की तुलना में कम है । इससे सूचित होता है कि अणुक ब्रोमीन के साथ अन्तर्वर्ती संकुल बनाना ट्राइब्रोमाइड आयन की तुलना में अधिक आसान है । इसका कारण यह है कि अणुक ब्रोमीन फुरोइक अम्ल में ट्राइब्रोमाइड आयन की अपेक्षा 2 गुना अधिक क्रियाशील है ।

सारणी 4 से स्पष्ट है कि अणुक ब्रोमीन की तुलना में Br^-_3 की सक्रियण एन्ट्रापी का निम्नतर मान प्रथम ब्रोमीनकारक के स्थूलतर आकार के कारण सक्रियित संकुल निर्माण के समय अधिक व्यवधान का सूचक है । फुरोइक अम्ल में, विद्युत ऋणात्मक समूह $-COOH$ जो वलय

8. बेल, आर० पी० तथा डाल्मैन, डी०, J. Chem. Soc., 1968, 3000.

9. स्कैफे, डी० बी० तथा टाइरेल, एच०, जे० वी०, J.Chem Soc., 1958, 59, 386.

10. वेस्ट, आर० सी०, C. R. C. Hand book of Chemistry and Physics, सी० आर० सी० प्रेस, ओहायो, 1977-1978, पृष्ठ डी-150.

11. पार्सन, आर०, Hand book of Electrochemical Constants, बटरवर्थस (लन्दन), 1959, पृष्ठ 47.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 29, No. 3, 1986

माइजर के G-फलन वाले चतुष्क समाकल समीकरण

के० नारायण तथा एम० लाल
गणित विभाग, रानी दुर्गावती विश्वविद्यालय जबलपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—जून 7, 1985]

सारांश

आंशिक समाकल आपरेटरों का उपयोग करते हुये माइजर के G-फलन वाले चतुष्क समाकल समीकरणों का हल दिया गया है।

Abstract

Quarduple integral equations involving Meijer's G-function. *By* K. Narain and M. Lal, Department of Mathematics, R. D. University, Jabalpur, (M. P.).

The solution of quadruple integral equations involving Meijer's G-function has been studied by using fractional integral operators.

1. **प्रस्तावना :**

इस प्रपत्र का उद्देश्य माइजर के G-फलनों वाले चतुष्क समाकल समीकरणों का एर्डेल्यी के आंशिक समाकल आपरेटरों का[14] प्रयोग करते हुये हल प्राप्त करना है क्योंकि यह अभी भी अछूता है। यहाँ पर जिन समीकरणों पर विचार किया गया है वे केसरवानी[15] द्वारा प्रयुक्त द्वैत समाकरण समीकरणों के प्रसार हैं।

हम चतुष्क समाकल समीकरणों को उभयनिष्ठ अष्टि वाले समीकरण में रूपान्तरित करने के लिये बुशमैन[10] की विधि का प्रयोग करेंगे जिससे यह प्रश्न एकाकी समाकल समीकरण में समानीत हो जाय।

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित चतुष्क समाकल समीकरणों पर विचार करेंगे

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[(xy)^{\Delta}\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right] f(y)dy = g_1(x),\ 0<x<a, \tag{1.1}$$

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[(xy)^A\left|\begin{matrix}l_1,\ldots,l_p\\ s_1,\ldots,s_q\end{matrix}\right.\right]f(y)dy=g_2(x),\ a<x<b, \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[(xy)^A\left|\begin{matrix}l_1,\ldots,l_p\\ s_1,\ldots,s_q\end{matrix}\right.\right]f(y)dy=g_3=(x),\ b<x<c, \tag{1.3}$$

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\ (xy)^A\left|\begin{matrix}h_1,\ldots,h_p\\ t_1,\ldots,t_q\end{matrix}\right|\Bigg]f(y)dy=g_4(x),\ c<x<\infty, \tag{1.4}$$

जहाँ

$$G_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\right.\right],$$

माइजर के G-फलन है ।[11]

इस पूरे प्रपत्र में हम यह मान लेते हैं कि G-फलनों में निहित प्राचल निर्देश [11, pp. 207] में उल्लिखित प्रतिबन्धों को तुष्ट करते हैं जिससे ये फलन सार्थक हो जाते हैं । हम (1.1) से (1.4) तक G-फलनों के पूर्व y के किसी घात को नहीं लिखेंगे क्योंकि

$$Z^\sigma G_{p,q}^{m,n}\left[Z\left|\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\ Z\left|\begin{matrix}a_i+\sigma\\ b_j+\sigma\end{matrix}\right],\tag{1.5}$$

पहले ही किसी घात गुणांक की अनुमति देता है ।

2. आंशिक समाकल आपरेटर

सर्वप्रथम एर्डेल्यी[14] के आंशिक समाकल आपरेटरों की परिभाषा दे रहे हैं ।

$$\overset{\alpha}{I}_x f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt;\ \overset{0}{I}_x f(x)=f(x), \tag{2.1}$$

$$\overset{\alpha}{K}_x f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\alpha (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt;\ \overset{0}{K}_x f(x)=f(x), \tag{2.2}$$

$$I_x^{\eta,\alpha}\ f(x)=x^{-\eta-\alpha}\ \overset{\alpha}{I}_x\ x^\eta f(x), \tag{2.3}$$

$$K_x^{\eta,\alpha}\ f(x)=x^\eta\ \overset{\alpha}{K}_x\ x^{-\eta-\alpha}f(x). \tag{2.4}$$

x^A के प्रति आंशिक समाकल आपरेटरों को $A>0$ के लिये समान सूत्रों के द्वारा परिभाषित किया जा सकता है जिसमें x के स्थान पर x^A रखना होगा। इस प्रकार हम लिखेंगे कि

$$I_{x^A}^{\eta,\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{-A\eta-A\alpha}\int_0^x (x^A-t^A)^{\alpha-1}t^{A\eta}f(t)d(t^A), \tag{2.5}$$

$$K_{x^A}^{\eta,\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{A\eta} \int_x^\infty (t^A-x^A)^{\alpha-1}t^{-A\eta-A\alpha} f(t)d(t^A). \tag{2.6}$$

हमें टिश्मार्श[1] से ज्ञात है कि यदि $f\epsilon L^1(0, \infty)$, $g\epsilon L^1(0,\infty)$, तो $(f*g)\epsilon L^1(0,\infty)$, जहाँ

$$(f*g)(x)=\int_0^\infty u^{-1}f(x/u)g(u)du. \tag{2.7}$$

L^1 इस प्रकार सम्मिश्र मानों वाले फलन का समुच्चय $L^1(0, \infty)$ एक बीजगणित बनाता है। बुकमैन[10] ने इंगित किया है कि यदि हम

$$I^{\eta,\alpha,A}(x)=\frac{A}{\Gamma(\alpha)} (x^A-1)^{\alpha-1}x^{-A\eta-A\alpha}U(x-1), \tag{2.8}$$

को परिभाषित करें जहाँ $U(x)$ heaviside unit step फलन है तथा निम्नवत् परिभाषित है

$$U(x)=\begin{cases}0, & \text{के लिये } x\leqslant 0,\\ 1, & \text{के लिये } x>0,\end{cases}$$

आंशिक समाकल आपरेटर (2.5) को संवलन (2.7) के रूप में लिखा जा सकता है

$$I_{x^A}^{\eta,\alpha} f(x)=(I^{\eta,\alpha,A}*f)(x). \tag{2.9}$$

और भी,

$$I^{\eta,\alpha,A}(x)\epsilon L^1(0, \infty), \text{ के लिये } \alpha>0, \zeta>(1/A)-1.$$

इसी प्रकार (2.6) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$K_{x^A}^{\eta,\alpha} f(x)=(K^{\eta,\alpha,A}*f)(x), \tag{2.10}$$

यदि हम

$$K^{\eta,\alpha,A}(x)=\frac{A}{\Gamma(\alpha)} (1-x^A)^{\alpha-1}x^{A\eta}U(1-x), \tag{2.11}$$

परिभाषित करें जो $L^1(0, \infty)$ से $\alpha>0$, $\eta>-(1/A)$ के लिये सम्बन्धित है।

3. मेलिन रूपान्तर तथा आंशिक समाकल आपरेटर

हम $f(x)$ के मेलिन रूपान्तर $F(s)$ को $M[f(x)]$ के द्वारा व्यक्त करते हैं अर्थात्

$$M[f(x)]=f(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx,$$

तथा $s=\sigma+i\tau$, को एक सम्मिश्र चर मानते हैं। तब $F(s)$ व्युत्क्रम मेलिन रूपान्तर $f(x)$ को समाकल

$$M^{-1}[F(s)]=f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s}ds.$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

इन रूपान्तरों से सम्बन्धित निम्नलिखित संकलन प्रमेय [1, Th 44] में यदि $s=c+i\tau$, $x^c f(x)$ तथा $x^c g(x)\epsilon L^1(0, \infty)$ तो $F(s)G(s)=M[(f^*))(x)]$, तथा $x^c(f^*g)(x)\epsilon L^1(0, \infty)$.

बुशमैन[10] ने सिद्ध किया है कि

$$M[I^{\eta,\alpha,A}(x)]=\frac{\Gamma(1+\eta-s/A)}{\Gamma(1+\eta+\alpha-s/A)}\;;\alpha>0;\,Re\;s<A(\eta+1), \tag{3.2}$$

$$M[K^{\eta,\alpha,A}(x)=\frac{\Gamma(\eta+s/A)}{\Gamma\eta+\alpha+s/A)}\;;\alpha>0;\,Re\;s>-A\eta, \tag{3.3}$$

और एर्डेल्यी[12] से हमें ज्ञात है कि

$$M\left[G_{p,q}^{m,n}\left\{(Bx)^A\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right\}\right]$$

$$=\frac{\frac{B-s}{A}\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s/A)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s/A)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s/A)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s/A)} \tag{3.4}$$

$$B>0;\,A>0;\,0<m\leqslant q;\,0\leqslant n\leqslant p;\,p+q<2(m+n);$$

$$-\min Re\;b_j,(1\leqslant j\leqslant m)<Re\;(s/A)<1-\max Re\;a_i,\,(1\leqslant i\leqslant n),$$

संवलन प्रमेय (3.1) में (3.2) तथा (3.3) के साथ (3.4) का प्रयोग करने पर निम्नलिखित सूत्र सरलता से प्राप्त किये जा सकते हैं :

$$I_{x^A}^{-c_1,\, a_1-c_1}\, G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}c_1,a_2,\ldots,c_p\\ b_1,b_2,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right], \tag{3.5}$$

$$K_{x^A}^{a_p,c_p-a_p}\, G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{p-1},c_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right], \tag{3.6}$$

$$K_{x^A}^{d_1,b_1-d_1}\, G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ d_1,b_2,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right], \tag{3.7}$$

$$I_{x^A}^{-b_q,b_q-d_q}\, G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_{q-1},d_q\end{matrix}\right.\right]. \tag{3.8}$$

ऐसे आपरेटरों का सम्प्रयोग बारम्बार हो सकता है क्योंकि वे संचयी तथा सहचारी नियमों का पालन करते हैं, और वे जिस क्रम में प्रयुक्त हो रहे हैं यह महत्वहीन है। इन सूत्रों से इन आपरेटरों का प्रभाव स्पष्ट है। हम इच्छानुसार G-फलनों में $a's$ तथा $b's$ प्राचलों को बदल सकते हैं। पदशः इन आपरेटरों के सम्प्रयोग से हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं।

$$\prod_{i=1}^{n} I_{x^A}^{-c_i,a_i-c_i}\, G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_q\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}c_1,\ldots,c_n,a_{n+1},\ldots,a_p\\ b_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right], \tag{3.9}$$

$$\prod_{i=n+1}^{p} K_{x^A}^{a_i,c_i-a_i}\, G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n,c_n,c_{n+1},\ldots,c_p\\b_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,b_q\end{matrix}\right],\tag{3.10}$$

$$\prod_{i=1}^{m}K_{x^A}^{d_i,b_i-d_i}\,G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\d_1,\ldots,d_m,b_{m+1},\ldots,b_q\end{matrix}\right],\tag{3.11}$$

$$\prod_{i=m+1}^{q}I_{x^A}^{-b_i,\,b_i-d_i}G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\middle|\begin{matrix}a_1,,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right]$$

$$=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_m,d_{m+1},\ldots d_q\end{matrix}\right],\tag{3.12}$$

$$\prod_{i=1}^{n}I_{x^A}^{-c_i,a_i-c_i}\prod_{i=n+1}^{p}K_{x^A}^{a_i,c_i-a_i}\prod_{i=1}^{m}K_{x^A}^{d_i,b_i-d_i}\prod_{i=m+1}^{q}I_{x^A}^{-b_i,b_i-d_i}$$

$$\times G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[(Bx)^A\middle|\begin{matrix}c_1,\ldots,c_p\\d_1,\ldots,d_q\end{matrix}\right].\tag{3.13}$$

इन सूत्रों की वैधता के विभिन्न प्रतिबन्ध एर्डेल्यी द्वारा दिये गये हैं।[12]

4. चतुष्क समाकल समीकरणों का हल

चतुष्क समाकल समीकरण (1.1) तथा (1.4) पर विचार करते हुए करने पर सम्बन्ध (3.13) का उपयोग समीकरण (1.1) को समीकरण (1.2) में बदलने के लिए हम अन्ततः लिखेंगे

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[(xy)^A\middle|\begin{matrix}c_1,\ldots,c_p\\d_1,\ldots,d_q\end{matrix}\right]f(y)dy=F(x),\ 0<x<b,\tag{4.1}$$

जहाँ

$$F(x)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}I_{x^A}^{-c_i,a_i-c_i}\prod_{i=n+1}^{p}K_{x^A}^{a_i,c_i-a_i}\prod_{i=1}^{m}K_{x^A}^{d_i,b_i-d_i}\prod_{i=m+1}^{q}I_{x^A}^{-b_i,b_i-d_i}g_1(x),0<x<a,\\g_2(x),\ a<x<b\end{cases}$$

इसी प्रकार समीकरण (1.4) को समीकरण (1.3) में बदलने के लिये सम्बन्ध (3.9) (3.12) का सम्प्रयोग करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[(xy)^A \left| \begin{matrix} e_1, \ldots, e_p \\ s_1, \ldots, s_r \end{matrix} \right.\right] f(y)dy = G(x),\ b<x<\infty, \tag{4.2}$$

$$G(x)=\begin{cases} g_3(x),\ b<x<c, \\ \prod_{i=1}^{n} I_{x^A}^{-e_i,h_i-e_i} \prod_{i=n+1}^{p} K_{x^A}^{h_i,e_i-h_i} \prod_{i=1}^{m} K_{x^A}^{s_i,t_i-s_i} \prod_{i=m+1}^{q} I_{x^A}^{-t_i,t_i-s_i} g_4(x),\ c<x<\infty. \end{cases}$$

पुनः सम्बन्ध (3.9) तथा (3.10) को समीकरण में और समीकरण (3.11) तथा (3.12) का समीकरण (4.2) में प्रयोग करने पर जिससे उनकी अष्टियाँ उभयनिष्ठ अष्टि में परिणत हो जायँ, हम समीकरण (4.1) तथा (4.2) को एकाकी समाकल समीकरणों के रूप में लिखेंगे

$$\int_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left[(xy)^A \left| \begin{matrix} e_1, \ldots, e_p \\ d_1, \ldots, d_q \end{matrix} \right.\right] f(y)dy = H(x),\ 0<x<\infty, \tag{4.3}$$

जहाँ

$$H(x)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{n} I_{x^A}^{-e_i,c_i-e_i} \prod_{i=n+1}^{p} K_{x^A}^{c_i,e_i-c_i} F(x),\ 0<x<b \\ \prod_{i=1}^{n} K_{x^A}^{d_i,s_i-d_i} \prod_{i=m+1}^{q} I^{-s_i,d_i-s_i} G(x),\ d<x<\infty. \end{cases}$$

केसरवानी ने[14,15] अपने शोध निबन्धों में (4.3) रूप वाले एकाकी समाकल समीकरण को हल करने की समस्या पर विचार-विमर्श किया है।

निर्देश

1. टिश्मार्श, ई० सी०, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, क्लेरेंडन प्रेस, आक्सफोर्ड, 1937.
2. बुसब्रिज, आइ० डब्लू०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1937, **44**, 115-29.
3. गोर्डन, ए० एन०, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1954, **29**, 360-363.
4. नोबल, बी०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ०**, 1955, **6**, 81-87.
5. स्नेडान, आई० एन०, **प्रोसी० ग्लास्गो० मैथ० एसो०**, 1960, **4**, 108-110.

6. काप्सन, ई० टी०, वही, 1961, **5**, 21-24.

7. एर्डेल्यी, ए० तथा स्नेडान, आई० एन०, **कनै० जर्न० मैथ०**, 1962, **14**, 685-93.

8. जानसन, बी० सी०, **पी-एचडी थीसिस ओरेगान स्टेट यूनिवर्सिटी**, 1964.

9. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1965, **119**, 389-98.

10. बुशमैन, आर० जी०, **मैथ० जापान**, 1964, **9**, 99-106.

11. एर्डेल्यी, ए० (सम्पादक), Higher Transcendental Functions. भाग 2, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.

12. वही, Tables of Integral Transforms, भाग 1, 2 मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.

13. एर्डेल्यी, ए०, Rend. Sem. Math. 1950-51 **19**,217-234

14. केसरवानी, आर० एन०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1963, **14**, 10-28, 271-77.

15. केसरवानी, आर० एन०, Math. Zeits., 1967, **98**, 83-88.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc.

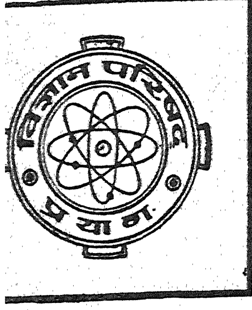
मूल्य
वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 8 पौंड या 32 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० या 2 पौंड या 8 डालर

Rates
Annual Rs. 12 *or* 8 £ *or* $ 32
Per Vol. Rs. 3 *or* 2 £ *or* $ 8

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 29 October 1986 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

एक व्यापकीकृत द्विविम स्टील्जे रूपान्तर के विषय में

एन० जोशी
राजकीय महाविद्यालय, जयहरिखाल (गढ़वाल)
तथा
जे० एम० सी० जोशी
राजकीय महाविद्यालय, नारायण नगर (पिथौरागढ़)[1]

[प्राप्त—मई 24, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक व्यापकीकृत द्विविम स्टील्जे रूपान्तर के लिये एक वास्तविक प्रतिलोमन संकारक प्राप्त करना है। हमने इसका उपयोग जोशी[3] द्वारा परिभाषित व्यापकीकृत द्विविम लाप्लास रूपान्तर के लिये एक नवीन प्रतिलोमन सूत्र प्राप्त करने में किया है।

Abstract

On a generalised Stieltje's transform of two variables. *By* N. Joshi, Government Degree College, Jaiharikhal (Garhwal), U. P. and J. M. C. Joshi, Government Degree College, Narayan Nagar (Pithoragarh), U. P..

The object of this paper is to find out an inversion operator for a generalised Stieltje's transform of two variables (introduced by us) by putting it into the form of convolution transform. We have also used this inversion formula to obtain a new inversion of the generalised Laplace transform of two variables introduced by J. M. C. Joshi[3].

1. प्रस्तावना

जोशी[3] ने एक व्यापकीकृत स्टील्जे रूपान्तर को निम्न रूप में परिभाषित किया है ([6, पृ० 43, समी० (4.2.3)] भी देखिये) :

A p 1

$$\phi(s)=\frac{\Gamma(\beta+\eta+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\eta+1)}\frac{1}{s}\int_0^\infty\left(\frac{y}{s}\right)^\beta {}_2F_1\left(\beta+\eta+1,\beta+1;\alpha+\beta+\eta+1;-\frac{y}{s}\right)$$

$$\cdot f(y)\,dy \tag{1.1}$$

जिसे श्रीवास्तव [5, पृ० 122] ने स्टील्जे रूपान्तर के उत्कृष्ट सार्वीकरणों में से एक माना है।

इसी तरह द्विविम स्टील्जे रूपान्तर के एक व्यापकीकरण को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है (देखिये [6, अध्याय 11])

$$\phi(p,q)=\frac{\Gamma(\beta_1+\eta_1+1)\Gamma(\beta_2+\eta_2+1)\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1)\Gamma(\alpha_2+\beta_2+\eta_2+1)}$$

$$\cdot\frac{1}{pq}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{x}{p}\right)^{\beta_1}\left(\frac{y}{q}\right)^{\beta_2} {}_2F_1\left(\beta_1+\eta_1+1,\,\beta_1+1;\,\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1;\,-\frac{x}{p}\right)$$

$$\cdot\ {}_2F_1\left(\beta_2+\eta_2+1,\,\beta_2+1;\,\alpha_2+\beta_2+\eta_2+1;\,-\frac{y}{q}\right)f(x,y)\,dx\,dy \tag{1.2}$$

जहाँ $f(x,y), 0<x<\infty$ तथा $0<y<\infty$ के लिये L वर्ग का हो, $\min\{Re\beta_1, Re\beta_2\}\geqslant 0$, $\min\{Re\,\eta_1, Re\,\eta_2\}>0$ तथा $\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1$, $\alpha_2+\beta_2+\eta_2+1$ में से प्रत्येक न तो शून्य के बराबर हो और न ही ऋण पूर्णांक ।

इस प्रपत्र में, समाकलन नियतांकों को परिणामों [2, पृ० 66] को ध्यान में रखते हुये शून्य माना गया है तथा संकारक D_x एवं D_y निम्नवत् परिभाषित हैं

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x},\ D_y=\frac{\partial}{\partial y}$$

2. सार्वीकृत स्टील्जे रूपान्तर संवलन रूपान्तर के रूप में

हम जानते हैं कि यदि फलन $\phi(u, v)$ का संवलन रूपान्तर (जिसकी अष्टि $G(u, v)$ है) $f(u, v)$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

$$f(u,v)=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty G(u-t,\,v-t)\phi(t,t')\,dt\,dt' \tag{2.1}$$

तो संगत प्रतिलोमन फलन $E(u, v)$ निम्न प्रकार दिया जाता है

$$E[(u,v)]^{-1}=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-ux-vy}G(x,y)dx\,dy \tag{2.2}$$

अत: प्रतिलोमन संकारक ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम (1.2) को संवलन रूपान्तर (2.1) के रूप में परिवर्तित किया गया है।

यदि $\phi(p, q)$ समीकरण (1.2) द्वारा परिभाषित हो तो

$$D_{pq}\{\phi(p,q)\}=\frac{A\Gamma(\beta_1+2)\Gamma(\beta_2+2)}{p^{\beta_1+2}\, q^{\beta_2+2}}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\beta_1}\, y^{\beta_2}\; {}_2F_1\left(a_1,\beta_1+2;\, b_1;\, -\frac{x}{p}\right)$$

$$\cdot\; {}_2F_1\left(a_2,\beta_2+2;\, b_2;\, -\frac{y}{q}\right) f(x,y)\; dx\, dy$$

जहाँ

$$a_1=\beta_1+\eta_1,+1, a_2=\beta_2+\eta_2+1, b_1=\alpha_1+\beta_1+\eta_1+1, b_2=\alpha_2+\beta_2+\eta_2+1,$$

$$A=\frac{\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)}{\Gamma(b_1)\,\Gamma(b_2)} \text{ तथा } D_{pq}=\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\,.$$

चूँकि, समघात फलनों के लिये आयलर प्रमेय से

$$s\,\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{s}{y}\right)^{-\beta-1}\, {}_2F_1\left(a,\beta+1;\, 4:\, -\frac{y}{s}\right)\right]=-y\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{s}{y}\right)^{-\beta-1}\, {}_2F_1\left(a,\beta+1;\, b;-\frac{y}{s}\right)\right]$$

या

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{y}{s}\right)^{\beta}\frac{1}{s}\, {}_2F_1\left(a,\beta+1:\, b;\, -\frac{y}{s}\right)\right]=-\,\frac{1}{s^{\beta+2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{\beta+1}\, {}_2F_1\left(a,\beta+1;\, b;\, -\frac{y}{s}\right)\right]$$

तथा

$$\frac{d}{dy}\left[y^{\beta+1}\, {}_2F_1\,(a,\beta+1;\, b;\, y)\right]=(\beta+1)y^{\beta}\, {}_2F_1\,(a,\beta+2;\, b;\, y)$$

अब

$$e^{p+q}D_{pq}\{\phi(e^p,e^q)\}=A\;\Gamma(\beta_1+2)\Gamma(\beta_2+2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p-x)(\beta_1+1)}\, {}_2F_1\,(a_1,\beta_1+2;\, b_1;-e^{-(p-x)})$$

$$\cdot\; e^{-(q-y)(\beta_2+1)}\, {}_2F_1\,(a_2,\beta_2+2;b_2;\, -e^{-(q-y)})\, f(e^x,e^y)\;.\; dx\, dy$$

या

$$\xi(p,\, q)=A\Gamma(\beta_1+2)\Gamma(\beta_2+2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p-x)(\beta_1+1)}\, {}_2F_1\,(a_1,\, \beta_1+1;\, b_1;\, -e^{-(p-x)})$$

$$\cdot\; e^{-(q-y)(\beta_2+1)}\, {}_2F_1\,(a_2,\beta_2+2;\, b_2;\, -e^{-(q-y)}\, \xi(x,\, y)\; dx\, dy \qquad (2.3)$$

जहाँ

$$\xi(p,\, q)=e^{p+q}D_{pq}\{\phi(e^p,\, e^q)\}$$

तथा

$$\xi(x,\, y)=f(e^x,\, e^y)$$

समाकल रूपान्तर (1.2) का समीकरण (2.3) द्वारा प्रदर्शित स्वरूप ही, समीकरण (2.1) द्वारा प्रदर्शित संवलन रूपान्तर के रूप का है।

3. प्रतिलोमन संकारक

चूँकि (2.3), संवलन रूपान्तर (2.1) जैसा है, अतः प्रतिलोमन फलन $E(u,v)$ निम्नलिखित समीकरण द्वारा दिया जा सकता है

$$\frac{1}{E(u, v)}=A\Gamma(\beta_1+1)\,\Gamma(\beta_2+1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux}e^{-vy}e^{-(\beta_1+1)x}e^{-(\beta_2+1)y}$$

$$_2F_1\,(a_1,\beta_1+2;\, b_1;\, -e^{-x})\cdot {}_2F_1\,(a_2,\beta_2+2;\, b_2;\, -e^{-y})\, dx\, dy$$

$$=A\Gamma(\beta_1+1)\Gamma(\beta_2+1)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\beta_1+u}y^{\beta_2+v}\, {}_2F_1\,(a_1,\beta_1+2;\, b;\, -x)$$

$$\cdot\, {}_2F_1\,(a_2,\beta_2+2;\, b_2;\, -y)\, dx\, dy$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_1-u)\Gamma(\beta_1+u+1)\Gamma(1-u)\Gamma(\eta_2-v)\Gamma(\beta_2+v+1)\Gamma(1-v)}{\Gamma(a_1+\eta_1+u)\,\Gamma(a_2+\eta_2+v)}$$

बशर्ते कि

$\min\{Re(1-u),\, Re(1-v)\}>0$, $\min\{Re(\eta_1-u),\, Re(\eta_1-v)\}>0$, $\min\{Re(\beta_1+u+1),\, Re(\beta_2+v+1)\}>0$ तथा $a_1+\beta_1+\eta_1+1$, $a_2+\beta_2+\eta_2+1$ में से प्रत्येक न तो शून्य के बराबर हो और न ही ऋण पूर्णांक।

चूंकि [1, पृ० 79]

$$\int_0^{\infty} z^{-s-1}{}_2F_1(a,b:d;-z)\,dz=\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(s)}\cdot\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+s)}\,\Gamma(-s),$$

यदि $Re\, s>0$, $Re\,(a+s)>0$, $Re(b+s)>0$ तथा d न तो शून्य के बराबर हो, और न ही ऋण पूर्णांक।

अब

$$E(D_p, D_q)\,\{\xi(p,q)\}=\zeta(p,q)$$

या

$$\frac{\Gamma(a_1+\eta_1-D_p)\,\Gamma(a_2+\eta_2-D_q)}{\Gamma(\eta_1-D_p)\Gamma(\eta_2-D_q)\Gamma(\beta_1+D_p+1)\Gamma(\beta_2+D_q+1)\Gamma(1-D_p)\Gamma(1-D_q)}$$

$$[e^{p+q}D_{pq}\{\phi(e^p,e^q)\}]$$

$$=\zeta(p, q)$$

हम जानते हैं कि

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)}=\lim_{n\to\infty} n^x \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right)$$

तथा

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+n)}$$

उपर्युक्त परिणामों का उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\Gamma(a_1+\eta_1-D_p)\Gamma(a_2+\eta_2-D_q)}{\Gamma(\eta_1-D_p)\Gamma(\eta_2-D_q)\Gamma(\beta_1+D_p+1)\Gamma(\beta_2+D_q+1)\Gamma(1-D_p)\Gamma(1-D_q)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a_1-\beta_1-D_p}\, n^{a_2-\beta_2-D_q}}{\{\Gamma(n+2)\}^2}$$

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{(D_p-\eta_1-k)(D_p+\beta_1+1+k)(D_q-\eta_2-k)(D_q+\beta_2+1+k)}{(D_p-a_1-\eta_1-k)(D_q-a_2-\eta_2-k)}$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D_p}{k}\right)\left(1-\frac{D_q}{k}\right)$$

अब हम निम्नलिखित परिणामों [पृ० 2, 66] का उपयोग करेंगे

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{D}{k}\right)[e^x F(e^x)]=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!}\, e^{nx}\, F^{n-1}(e^x)$$

$$\prod_{k=1}^{n}(D+a+k)[(e^{-(a+n)x}F(e^x)]=e^{-(a-1)x}\, F^{n+1}(e^x)$$

$$\prod_{k=0}^{n} D+a-k)[e^{-ax}F(e^x)]=e^{(n+1-a)x}F^{n+1}(e^x)$$

तथा

$$\prod_{k=0}^{n}(D+a-k)^{-1}\,[e^{(n+1-a)x}F(e^x)]=e^{-ax}F^{-n-1}(e^x)$$

जहाँ $D=\dfrac{d}{dx}$ तथा $F^{-n-1}(x)$ वह फलन है, जिसका x के सापेक्ष $(n+1)$वां अवकल गुणांक $F(x)$ है।

उपर्युक्त सूत्रों का उपयोग करने पर हम पाते हैं कि–

$$E(D_p,D_p)[e^{p+q}D_{pq}\{\phi(e^p,e^q)\}]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha_1-\beta_2}\ n^{\alpha_2-\beta_2}}{\{\Gamma(n)\Gamma(n+2)\}^2}$$

$$.\, e^{(\alpha^2+\eta_2)q}\, D_{e^q}^{-n-1}\ e^{-\alpha_2 q}\, D_{e^q}^{n+1}\ e^{-(\beta_2+\eta_2)q}\, D_{e^q}^{n+1}\ e^{(2n+\beta_2+1)q}\, D_{e^q}^{n-1}$$

$$.\, e^{(\alpha_1+\eta_1)p}\, D_{e^p}^{-n-1}\ e^{-\alpha_1 p}\, D_{e^p}^{n+1}\ e^{-(\beta_1+\eta_1)p}\, D_{e^p}^{n+1}\ e^{(2n+\beta_1+1)p}$$

$$.\, D_{e^p}^{n-1}\ [D_{pr}\{\phi(e^p,e^q)\}]=f(e^p,e^q)$$

मूल चरों में परिवर्तित करने पर

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha_1)\ \Gamma(n+\alpha_2)}{\Gamma(n+\beta_1)\Gamma(n+\beta_2)\{\Gamma(n)\Gamma(n+2)\}^2}\, q^{\alpha_2+\eta_2}\ D_q^{-n-1}\, q^{-\alpha_2}\ D_q^{n+1}$$

$$.\, q^{-(\beta_2+\eta_2)}\, D_q^{n+1}\ q^{2n+\beta_2+1}\, D_q^{n-1}\ p^{\alpha_1+\eta_1}\, D_p^{-n-1}\ p^{-\alpha_1}\, D_q^{n+1}\ p^{-(\beta_1+n_1)}$$

$$.\, D_p^{n+1}\ p^{2n+\beta_1+1}\, D_p^{n-1}\ [D_{pq}\{\phi(p,q)\}]\Big|_{\substack{p=x\\ q=y}}=f(x,y). \tag{3.1}$$

यही अभीष्ट प्रतिलोमन संकारक है।

प्रमेय 3.1

यदि $f(x,y), 0<x<\infty$ तथा $0<y<\infty$ के लिये L वर्ग का हो तथा समाकल (1.2) अभिसारी हो तो (3.1), p तथा q के धनात्मक मानों के लिये सत्य है।

प्रतिलोमन संकारक (3.1) की उपयोगिता एवं वैधता को एक उदाहरण द्वारा लेखक ने[4] प्रदर्शित किया है, जिसे स्थानाभाव के कारण इस प्रपत्र में नहीं दिया जा रहा है।

4. सार्वीकृत द्विविम लाप्लास रूपान्तर हेतु नवीन प्रतिलोमन सूत्र

अब प्रतिलोमन संकारक (3.1) का उपयोग एक सार्वीकृत द्विविम लाप्लास रूपान्तर हेतु नवीन प्रतिलोमन सूत्र ज्ञात करने में किया जा रहा है।

यदि $\phi(p,y)$ समाकल (1.2) द्वारा परिभाषित हो तो इसका प्रतिलोम ज्ञात करने पर $f(x,y)$ प्राप्त होगा, परन्तु

$$\phi(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-pu-qv} F(u,v)du\, dv \tag{4.1}$$

जहाँ

$$F(p,q) = \frac{\Gamma(\beta_1+\eta_2+1)\Gamma(\beta_2+\eta_1+1)}{\Gamma(a_1+\beta_1+\eta_1+1)\Gamma(a_2+\beta_2+\eta_2+1)}\int_0^\infty\int_0^\infty (px)^{\beta_1}(qy)^{\beta_2}$$

$$\cdot\, {}_1F_1(\beta_1+\eta_1+1,\ a_1+\beta_1+\eta_1+1;-px)\,{}_1F_1(\beta_2+\eta_2+1, a_2+\beta_2+\eta_2+1;-qy)\, f(x,y)\, dx\, dy \tag{4.2}$$

जोशी[3] द्वारा परिभाषित सार्वीकृत द्विविम लाप्लास रूपान्तर है। अतः यदि (4.1) के लिये प्रतिलोमन संकारक (3.1) का उपयोग किया जाय, तो (4.2) के लिये एक प्रतिलोमन संकारक प्राप्त होता है।

अव

$$D_{pq}\{\phi(p,q)\}=\int_0^\infty\int_0^\infty u\, v\, e^{-pu-qv} F(u,v)\, du\, dv$$

$$D_p^{n-2}[D_{pq}\{\phi(p,q)\}]=(-1)^{n-2}\int_0^\infty\int_0^\infty u^{n-1}\, v\, e^{-pu-qv} F(u,v)\, du\, dv$$

साधारण चर परिवर्तन द्वारा हम पाते हैं,

$$D_p^{n-2}[D_{pq}\{\phi(p,q)\}]=(-1)^{n-2}\,\frac{1}{p^n}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{n-1}\, v\, e^{-x-qv} F\left(\frac{x}{p},\, v\right) dx\, dv$$

हम जानते हैं कि

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\left[\frac{s^{n+\beta-1}}{t^{n+\beta}} f\left(\frac{t}{s}\right)\right] = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{s^{n+\beta-2}}{t^{n+\beta-1}} f\left(\frac{t}{s}\right)\right]$$

उपर्युक्त प्रमेय के बारम्बार उपयोग से हम प्राप्त करते हैं,

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^n\left[\frac{s^{n+\beta-1}}{t^{n+\beta}} f\left(\frac{t}{s}\right)\right]=(-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n\left[\frac{s^{\beta-1}}{t^{\beta}} f\left(\frac{t}{s}\right)\right]$$

या

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^n\left[s^{n+\beta-1} f\left(\frac{t}{s}\right)\right]=(-1)^n\, t^{n+\beta}\, s^{\beta-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n\left[t^{-\beta} f\left(\frac{t}{s}\right)\right]$$

तथा

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{-n}\left[s^{\beta-1} f\left(\frac{t}{s}\right)\right]=(-1)^n\, t^{\beta}\, s^{n+\beta-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-n}\left[t^{-n-\beta} f\left(\frac{t}{s}\right)\right]$$

उपर्युक्त परिणामों के प्रयोग से,

$$D_p^n \, p^{2n+\beta-1} \, D_p^{n-2} \, [D_{pq}\{\phi(p,q)\}]$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2n+\beta_1-1} \, v \, e^{-x-qv} \, p^{\beta_1-1} \, D_x^n\left[x^{-\beta_1} \, F\left(\frac{x}{p}, v\right)\right] dx\, dv$$

$$D_p^n \, p^{-(\eta_1+\beta_1)} \, D_p^n \, p^{2n+\beta_1-1} \, D_p^{n-2} \, [D_{pq}\{\phi(p,q)\}]$$

$$=(-1)^n \int_0^\infty\int_0^\infty x^{2n+\beta_1-\eta_1-1} v e^{-x-pq} \, p^{-\eta_1-n-1} \, D_x^n \, x^{n+\eta_1}$$

$$D_x^n\left[x^{-\beta_1} \, F\left(\frac{x}{p}, v\right)\right] dx\, dv$$

$$p^{\alpha_1+\eta_1} \, D_p^{-n} \, p^{-\alpha_1} \, D_p^n \, p^{-(\eta_1+\beta_1)} \, D_p^n \, p^{2n+\beta_1-1} \, D_p^{n-2} \, [D_{pq}\{\phi(p,q)\}]$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{n-\alpha_1+\beta_1-2\eta_1-1} v e^{-x-qv} \, p^{-1} \, D_x^{-n} \, x^{\alpha_1+\eta_1} \, D_x^n \, x^{n+\eta_1}$$

$$D_x^n \, x^{-\beta_1} \, F\left(\frac{x}{p}, v\right) . \, dx\, dv$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty u^{n-\alpha_1+\beta_1-2\eta_1-1} \, v \, e^{-px-qv} \, p^{n-1} \, D_u^{-n} \, u^{\alpha_1+\eta_1} \, D_q^n \, u^{n+\eta_1}$$

$$D_n^n \, u^{-\beta_1} \, F(u,v) \, du\, dv$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty v \; e^{-qv} \, G(u,v) \, du\, dv$$

$$=\frac{1}{q}\int_0^\infty\int_0^\infty y \, e^{-y} \, G\left(u, \frac{y}{q}\right) du\, dy$$

जहाँ, सुविधा हेतु, हमने लिखा है, कि

$$G\left(u, \frac{y}{q}\right) = e^{-pu} \, u^{n-\alpha_1+\beta_1-2\eta_1-1} \, p^{n-1} \, D_u^{-n} \, u^{\alpha_1+\eta_1}$$

$$D_u^n u^{n+\eta_1} \, D_u^n \, u^{-\beta_1} \, F\left(u, \frac{y}{q}\right)$$

पुनः इन्हीं परिणामों का उपयोग p, u को अचर मानते हुये, दूसरे चर हेतु करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$D_q^{n-2} \; p^{\alpha_1+\eta_1} D_p^{-n} \; p^{-\alpha_1} D_p^n \; p^{-(\beta_1+\eta_1)} D_p^n \; p^{2n+\beta_1-1}$$

$$D_p^n \; [D_{pq} \{\phi(p, q)\}]$$

$$=(-1)^{n-1} \frac{1}{q^n} \int_0^\infty \int_0^\infty y^{n-1} \, e^{-y} \, G\left(u, \frac{y}{q}\right) du \, dy$$

इसी तरह अन्य संकारकों का उपयोग करते हुए,

$$q^{\alpha_2+\eta_2} D_q^{-n} \; q^{-\alpha_2} D_q^n \; q^{-(\beta_2+\eta_2)} D_p^n \; p^{2n+\beta_2-1} \; D_q^{n-2}$$

$$p^{\alpha_1+\eta_1} D_p^{-n} \; p^{-\alpha_1} D_p^n$$

$$. \, p^{-(\beta_1+\eta_1)} D_p^n \; p^{2n+\beta_1-1} \; D^{n-2} \, [D_{pq}\{\phi(p,q)\}]$$

$$=\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-qv} \; v^{n-\alpha_1+\beta_1-2\eta_1-1} \; q^{n-1} \; D_v^{-n} \; v^{\alpha_2+\eta_2}$$

$$D_v^n \; v^{\eta_2+n} D_v^n \; v^{-\beta_1} \, G(u,v) \, du \, dv$$

इस तरह अन्त में, हम पाते हैं कि

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha_1-1) \, \Gamma(n+\alpha_2-1)}{\Gamma(n+\beta_1-1) \, \Gamma(n+\beta_2-1) \{\Gamma(n-1)\Gamma(n+1)\}^2} \; q^{\alpha_2+\eta_2} \, D_q^{-n}$$

$$q^{-\alpha_2} D_q^n \; q^{-(\beta_2+\eta_2)}$$

$$. \, D_p^n \; q^{2n+\beta_1-1} \; D_q^{n-2} \; p^{\alpha_1+\eta_1} \, D_p^{-n} \; p^{-\alpha_1} D_p^n \; p^{-(\beta_1+\eta_1)}$$

$$D_p^n \; p^{2n+\beta_1-1} \, D_p^{n-2}$$

$$. \, [D_{pq} \, \{\phi(p,q)\}] \tag{4.3}$$

A p 2

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha_1-1)\,\Gamma(n+\alpha_2-1)}{\Gamma(n+\beta_1-1)\,\Gamma(n+\beta_2-1)\,\{\Gamma(n-1)\,\Gamma(n+1)\}^2} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-pu-qv}\, u^{n-\alpha_1+\beta_1-2\eta_1-1}$$

$$. v^{n-\alpha_2+\beta_2-2\eta_2-1}\, p^{n-1}\, q^{n-1}\, D_v^{-n}\, v^{\alpha_2+\eta_2} D_v^n\, v^{n+\eta_2} D_v^n\, v^{-\beta_2} D_u^{-n}$$

$$. u^{\alpha_1+\eta_1} D_v^n\, u^{n+\eta_1} D_u^{n-2}\, u^{-\beta_1} F(u,v)\, du\, dv \Bigg]_{\substack{p=x\\ q=y}}$$

$$=f(x, y).$$

इस तरह (4.2) के लिये प्रतिलोमन सूत्र प्राप्त हुआ, (4.3) की उपयोगिता एवं वैधता को भी लेखक[4] ने एक उदाहरण द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय इस प्रपत्र में सुधार हेतु महत्वपूर्ण सुझाव प्रदान करने के लिये प्रो० एच० एम० श्रीवास्तव, विक्टोरिया यूनिवर्सिटी, कनाडा के आभारी हैं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcadental Functions, खंड 1, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.
2. हिर्शमान, आई० आई० तथा विडर, डी० वी०, The Convolution Transform, प्रिसेन्टन यूनी० प्रेस, 1955.
3. जोशी, जे० एम० सी०, **पी-एच० डी० थीसिस**, आगरा विश्वविद्यालय, 1963.
4. जोशी, एन०, **पी-एच० डी० थीसिस**, कुमायूँ विश्वविद्यालय, 1979.
5. श्रीवास्तव, एच० एम०, Publ. Math. Debrecen, **23**, 1976, 119-122.
6. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-Functions of One and Two Variables with Applications, साउथ एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली तथा मद्रास, 1982.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

कई संमिश्र चरों का H-फलन तथा उष्मा चालन में सीमांत मान समस्या का हल

टी० मोहम्मद

गणित विभाग, सर सय्यद कालेज, टलिपरम्बा (केरल)

[प्राप्त—अक्टूबर 17, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में उष्मा चालन के मूलभूत समीकरण को हल करने के लिये श्रीवास्तव तथा पाण्डेय द्वारा परिभाषित हुई संमिश्र चरों वाले *H*-फलन का उपयोग किया गया है।

Abstract

The *H*-function of several complex variables and the solution of a boundary value problem in heat conduction. *By* T. Mohamed, Department of Mathematics, Sir Syed College, Taliparamba Kerala.

In this paper, we have employed the *H*-function of several complex variables defined by Srivatsava and Pande[8] to solve the fundamental equation of heat conduction. As an extension of the use of *H*-function of several variables in heat conduction we shall consider the problem of determining a function $u(x, t)$, if $u=f(x)$ when $t=0$, where $u(x, t)$ represent the temperature in a non-homogeneous bar with ends $x=-1$ and $x=1$ in wich the thermal conductivity is proportional to $1-x^2$ and if the lateral surface of the bar is insulated, the heat equation has the form [1, p. 197]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \ b \text{ is constant.}$$

The ends $x=\pm 1$ are also insulated because the coductivity vanishes there. The solutions are of very general character and various results occurring in physics and applied mathematics may be derived as special cases.

1. परिभाषायें तथा प्रयुक्त परिणाम

अनेक संकर चरों वाले H-फलन की परिभाषा श्रीवास्तव तथा पाण्डेय[8] ने निम्नवत् दी है

$$H^{0,N:(M',N'):\dots:(M^{(r)},N^{(r)})}_{P,Q:(P',Q'):\dots:(P^{(r)},Q^{(r)})}\left[\begin{array}{c}(a_P,\alpha_P):(c'_P,C'_P):\dots:(c^{(r)}_P,C^{(r)}_P)\\ (b_Q,\beta_Q):(d'_Q,D'_Q):\dots:(d^{(r)}_Q,D^{(r)}_Q)\end{array}\middle| x_1, x_2, x_3, \dots, x_r\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^r}\int_{L_1}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(S_1)\phi_2(S_2)\dots\phi_r(S_r)\psi(S_1, S_2, \dots, S_r)$$

$$\times\ x_1^{S_1}\,.\,x_2^{S_2}\dots x_r^{S_r}\,dS_1\,.\,dS_2\,\dots\,dS_r \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{M^{(i)}}\Gamma(d_j^{(i)}-D_j^{(i)}S_i)\prod\limits_{1}^{N^{(i)}}\Gamma(1-c_j^{(i)}+C_j^{(i)}S_i)}{\prod\limits_{j=M^{(i)}+1}^{\phi^{(i)}}\Gamma(1-d_j^{(i)}+D_j^{(i)}S_i)\prod\limits_{N^{(i)}+1}^{P^{(i)}}\Gamma(c_j^{(i)}-C_j^{(i)}S_i)}$$

$$\psi(S_1, S_2,\dots S_r)=\frac{\prod\limits_1^N\Gamma(1-a_j+\sum\limits_1^r\alpha_j^{(i)}S_i)}{\prod\limits_1^Q\Gamma(1-b_j+\sum\limits_1^r\beta_j^{(i)}S_i)\prod\limits_{N+1}^P\Gamma(a_j-\sum\limits_1^r\alpha_j^{(i)}S_i)}\quad (i=1, 2, \dots, r)$$

(1.1) के दाईं ओर का समाकल अभिसारी होगा यदि $|\arg x_i|<\frac{1}{2}\pi V_i$ जहाँ

$$V_i=\sum_1^N\alpha_j^{(i)}-\sum_{N+1}^P\alpha_j^{(i)}-\sum_1^Q\beta_j^{(i)}+\sum_1^{M^{(i)}}D_j^{(i)}-\sum_{M+1}^{Q^{(i)}}D_j^{(i)}$$

$$+\sum_1^{N^{(i)}}C_j^{(i)}-\sum_{N+1}^{P^{(i)}}C_j^{(i)}>0,\ i=1, 2, \dots, r. \tag{1.2}$$

उपपत्ति में निम्नलिखित समाकल की आवश्यकता पड़ेगी

$$\int_{1-}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1} P_v^{\mu}(x)\, {}_uF_v\,[au; \beta v; c(1-x^2)^d]$$

$$H[z_1(1-x^2)^{\sigma_1}, z_2(1-x^2)^{\sigma_2}, \ldots, z_r(1-x^2)^{\sigma_r}]\, dx$$

$$=\frac{2^{\mu}\,\pi}{\Gamma(1-\mu/2+v/2)\,\Gamma(1/2-\mu/2-v/2)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_u)_r\, c^r}{(\beta_v)_r\, r!}$$

$$H^{0,N+2:(M',N'):\ldots(M^{(r)},N^{(r)})}_{p+2,Q+2:(P',Q':\ldots(P^{(r)}Q^{(r)})}$$

$$\left[z_1, z_2, \ldots, z_r \middle| \begin{matrix} (1-\lambda-dr\pm\mu/2; \sigma_1, \ldots, \sigma_r), (a_P, a_P^{(i)}), : \ldots \\ (b_Q,\beta_Q^{(i)}), (1-\lambda-dr+v/2; \sigma_1, \ldots, \sigma_r), (-\lambda-d_r-v/2; \sigma_1, \ldots, \sigma_r); \ldots \end{matrix} \right] \tag{1.3}$$

जहाँ σ_i धनात्मक है,

$$Re\left\{ \lambda+\sigma_i \sum_{i=1}^{r} \frac{d_j^{(i)}}{D_j^{(i)}} \right\} > \tfrac{1}{2}|Re(\mu)|$$

$$|\arg x_i| < \tfrac{1}{2}\pi V_i,\ V_i>0$$

$$\lambda>0,\ u<v,\ u=v+1, |c|<1.$$

समाकलन के क्रम को बदलने, अनेक चरों वाले H-फलन की परिभाषा तथा निर्देश[2] का प्रयोग करने तथा सान्त अन्तर आपरेटर E[2, p. 316, (16)] का प्रयोग करने पर[4] जिसके गुण इस प्रकार हैं $E_\alpha f(a)=f(a+1)$, $E_\alpha{}^n f(a)=f(a+n)$ तथा श्रेणी को $0-\infty$ तक योग करने पर (1.3) प्राप्त होता है । समाकल में क्रम परिवर्तन वैध है क्योंकि निहित समाकल परम अभिसारी हैं ।

जब $r=2$, तो

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1} P_v^{\mu}(x)\, {}_uF_v[a_u; \beta_v; c(1-x^2)^d]$$

$$H[y(1-x^2)^k, z(1-x^2)^{\delta}]dz=\frac{\pi 2^{\mu}}{\Gamma(1-\mu/2+v/2)\Gamma(1/2-\mu/2-v/2)}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_u)_r\, c^r}{(\beta_v)_r\, r\,!}\; H^{0,n_1+2\,:\,m_2,n_2\,:\,m_3,n_3}_{p_1+2,q+2\,:\,p_2,q_2\,:\,p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\left| \begin{matrix} (1-\lambda-dr\pm\mu/2;\, k,\delta),(P_1) & ;\,(P_2)\,;\,(P_3) \\ (Q_1),(1-\lambda-dr+v/2,k,\delta),(-\lambda-dr-v/2,k,\delta) & :\,(Q_2)\,:\,(Q_3) \end{matrix}\right.\right]$$

$$\lambda>0,\ u<v \text{ या } u=v+1,\ |c|<1 \tag{1.4}$$

$n_1=p_1=q_1=0,\ m_3=1,\ n_3=p_3,\ f_1=0$, रखने पर तथा $z\to 0$ बनाने पर सिंह तथा वर्मा द्वारा प्रदत्त परिणाम प्राप्त होगा[7]।

2. मुख्य परिणाम

जिस सामान्य हल को प्राप्त किया जाता है, वह है

$$u(x,t)=\pi 2^{\mu-1}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2v+1)(v-\mu)\,!\,P^{\mu}_{v}(x)}{(v+\mu)\,!\,\Gamma(1-\mu/2+v/2)\Gamma(1/2-\mu/2-v/2)}$$

$$\times \exp\{-bv(v+1)t\}\times\frac{(\alpha_u)_s\,c^s}{(\beta_v)_s\,s!}$$

$$\times\; H^{0,N+2\,:\,M',N'\,:\,\dots\,\dots\,\dots\,:\,M^{(r)},\,N^{(r)}}_{P+2,\,Q+2\,;\,P',Q'\,:\,\dots\,\dots\,\dots\,:\,P^{(r)},\,Q^{(r)}}$$

$$\left[z_1, z_2, \dots, z_r \left| \begin{matrix} (1-\lambda-ds\pm\mu/2;\,\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r),(a_P,\alpha_P^{(i)}) & :\dots \\ (b_Q,\beta_Q^{(i)}),(1-\lambda-ds+v/2;\,\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r),(-\lambda-ds-v/2;\,\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r & :\dots \end{matrix}\right.\right] \tag{2.1}$$

जहाँ $\sigma_i>0$, (धनात्मक पूर्णांक), $-1<x<+1$

$|\arg z_i|<\frac{1}{2}V_i\pi,\ V_i>0$

उपपत्ति

निम्नलिखित पर विचार करें

$$u(x,0)=f(x)=(1-x^2)^{\lambda-1}{}_uF_v[\alpha_u,\beta_v,c(1-x^2)^d]$$

$$\times H[z_1(1-x^2)^{\sigma_1},z_2(1-x^2)^{\sigma_2},\dots,z_r(1-x^2)^{\sigma_r}] \tag{2.2}$$

$$u(x,t)=\sum_{v=0}^{\infty} A_v\, P_v^{\mu}(x)\, e^{-bv(v+1)t} \tag{2.3}$$

यदि $t=0$ तो (2.2) के बल पर

$$u(x,0)\equiv(1-x^2)^{\lambda-1}{}_uF_v[\alpha_u,\beta_v,c(1-x^2)^d]$$

$$\times H[z_1(1-x^2)^{\sigma_1},z_2(1-x^2)^{\sigma_2},\ldots,z_r(1-z^2)^{\sigma_r}]$$

$$\equiv \sum_{v=0}^{\infty} A_v\, P_v^{\mu}(x) \tag{2.4}$$

दोनों ओर $P_n^{\mu}(x)$ से गुणा करने तथा x के प्रति -1 से $+1$ तक समाकलित करने पर

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}{}_uF_v[\alpha_u,\beta_v,\, c(1-x^2)^d]\; P_v^{\mu}(x) H[z_1(1-x^2)^{\sigma_1},\ldots,z_r(1-x^2)^{\sigma_r}]\, dx$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty} A_v \int_{-1}^{1} P_v^{\mu}(x) P_n^{\mu}(x)\, dx.$$

लेगेण्ड्र बहुपदी के लाम्बिकता गुण तथा (1.3) का प्रयोग करने पर हल (2.1) प्राप्त होता है।

$N=P=Q=0$ रखने पर कई चरों वाला H-फलन फाक्स के 'r' H-फलनों के गुणनफलों में विभक्त हो जाता है। प्राचलों के और अधिक विशिष्टीकरण से H-फलनों को बेसिल फलन, लेगेण्ड्र फलन तथा अन्य उच्च बीजीय फलनों में परिणत किया जा सकता है। अतएव (2.2) में दिया गया $f(x)$ सामान्य लक्षण वाला है।

$s=0$ तथा $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\ldots\sigma_r=\sigma$ होने पर सिद्दीकी तथा माथुर द्वारा (2.1) तथा (1.3) की विशिष्ट दशायें प्राप्त की गईं[6]।

(1.3) तथा (2.1) में $r=2$, $s=0$, $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\ldots=\sigma_r=\sigma$ रखने पर राकेश द्वारा प्राप्त परिणाम प्राप्त होगा[5]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० बी० सी० नायर का मार्गदर्शन हेतु तथा यू० जी० सी० का आर्थिक सहाय्य के लिए आभारी है।

निर्देश

1. चर्चिल, आर० वी०, Fourier Series and Boundary value problems, मैकग्राहिल, नई दिल्ली 1954.

2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, नई दिल्ली 1941.

3. माथुर, बी० एल०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका** 1980, **23**, 111-15.

4. मिल्ने-थामसन, एल० एम०, The Calculus of Finite differences. मैकमिलन, लन्दन, 1933.

5. राकेश, एस० एल०, Math. Student, 1973, **41**, 442-444.

6. सिद्दीकी, ए०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1978, **21**, 341-345.

7. सिंह तथा वर्मा, आर० सी०, J. Indian Math. Soc. (N. S.), 1972, **36**, 325-332.

8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा रेखा पाण्डेय, J. Reine. Angrew. Math., 1976, **283/284**, 265-274.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 29, No. 4, 1986

बहुचर I-फलन

वाई० एन० प्रसाद
संप्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी,
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर 5, 1985]

सारांश

लेखक ने विशिष्ट फलनों के साहित्य में एक नया विशिष्ट फलन प्रस्तावित किया है जिसका नाम है बहुचर I-फलन। इसकी परिभाषा, अभिसरण आदि पर विचार किया गया है।

Abstract

On a multivaiable I-function. *By* Y. N. Prasad, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

The author has introduced a new special function namely multivariable *I*-function in the literature of special functions. The new multivariable *I*-function is an immediate generalization of multivariable *H*-function in the same sense as the multivariable *H*-function is the immediate generalization of the multivariable *G*-function. The definition, convergence, a symptotic behaviour and deductions have been considered.

1. लेखक द्वारा प्रस्तावित बहुचरीय *I*-फलन को निम्नवत् परिभाषित एवं व्यक्त किया जायेगा

$$I[z_1,\ldots,z_r] = I^{0,n_2:0,n_3:\ldots:0,n_r:(m',n');(m'',n'');\ldots}_{p_2,q_2:p_3,q_3\ldots:p_r,q_r:[p'',q''];[p'',q''];\ldots}$$

$$\begin{matrix}\ldots;(m^{(r)},n^{(r)}) \\ \ldots;[p^{(r)},q^{(r)}]\end{matrix}\left[z_1,\ldots,z_r \middle| \begin{matrix}(a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}: \\ (b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2}:\end{matrix} \right.$$

$$(a_{3j}\,;\,\alpha'_{3j}\,,\,\alpha''_{3j}\,,\,\alpha'''_{3j})_{1,p_3}:\ldots:(a_{rj},\,\ldots,\,\alpha'_{rj}\,,\ldots,\,\alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}$$

$$(b_{3j}\,;\,\beta'_{3j}\,,\,\beta''_{3j}\,,\,\beta'''_{3j})_{1,q_3}:\ldots:(b_{rj}\,;\,\beta'_{rj}\,,\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r}$$

$$\left.\begin{matrix}:(a'_j\,,\,\alpha'_j)_{1,p'}\,;\ldots;(a^{(r)}_j\,,\,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}\\ :(b'_j\,,\,\beta'_j)_{1,q'}\,;\ldots;(b^{(r)}_j\,,\,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s_1)\ldots\phi_r(s_r),\,\psi(s_1,\ldots,s_r)\;z_1^{s_1}\ldots z_r^{s_r}\,ds_1\ldots ds_r; \tag{1}$$

जहाँ $\omega=\sqrt{-1}$,

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m^{(i)}}\Gamma(b^{(i)}_j-\beta^{(i)}_j s_i)\prod\limits_{j=1}^{n^{(i)}}\Gamma(1-a^{(i)}_j+\alpha^{(i)}_j s_i)}{\prod\limits_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}}\Gamma(1-b^{(i)}_j+\beta^{(i)}_j s_i)\prod\limits_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}}\Gamma(a^{(i)}_j-\alpha^{(i)}_j s_i)}\quad\forall\, i\in\{1,\ldots,r\} \tag{2}$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_r)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-a_{2j}+\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha^{(i)}_{2j}s_i)\prod\limits_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-a_{3j}+\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha^{(i)}_{3j}s_i)\ldots}{\prod\limits_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(a_{2j}-\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha^{(i)}_{2j}s_i)\prod\limits_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(a_{3j}-\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha^{(i)}_{3j}s_i)\ldots}$$

$$\frac{\ldots\prod\limits_{j=1}^{n_r}\Gamma(1-a_{rj}+\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_{rj}s_i)}{\ldots\prod\limits_{f=n_r+1}^{p_r}\Gamma(a_{rj}-\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha^{(i)}_{rj}s_i)\prod\limits_{j=1}^{q_2}\Gamma(1-b_{2j}+\sum\limits_{i=1}^{2}\beta^{(i)}_{2j}s_i)\prod\limits_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-b_{3j}+\prod\limits_{i=1}^{3}\beta^{(i)}_{3j}s_i)}$$

$$\frac{1}{\ldots\prod\limits_{j=1}^{q_r}\Gamma(1-b_j+\sum\limits_{i=1}^{r}\beta^{(i)}_j s_i)} \tag{3}$$

यहाँ पर, तथा आगे सर्वत्र (i) से डैशों की संख्या सूचित होगी। यथा $b^{(1)}=b'$, $b^{(2)}=b''$, ...; $(a'_j\,,\,\alpha'_j)_{2,p'}$ तथा $(a_{2j};\alpha'_{2j}\,,\,\alpha''_{2j})_{1,p_2}$ p' तथा p_2 प्राचलों के अनुक्रमों के लिये आये हैं अर्थात् क्रमशः $(a'_1\,,\,\alpha'_1)$, ..., $(a'_{p'}\,,\,\alpha'_{p'})$ तथा $(a_{21}\,;\alpha'_{21}\,,\,\alpha''_{21})$, ..., $(a_{2p};\alpha''_{2p})$ रिक्त गुणनफल को

इकाई माना गया है, (2) तथा (3) में आगत गुणांक हैं $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \alpha_{kj}^{(i)}, \beta_{kj}^{(i)}$ $(i=1, \ldots, r; k=1, \ldots, r)$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं तथा उसमें निहित $a_j^{(i)}, b_j^{(i)}$ $(i=1, \ldots, r)$, a_{kj}, b_{kj} $(k=2, \ldots, r)$ संकर संख्यायें हैं तथा यहाँ पर प्रयुक्त $m^{(1)}, n^{(i)}, p^{(i)}, q^{(i)}, (i=1, \ldots, r), n_k, p_k, q_k$ $(k=2, \ldots, r)$ धनात्मक पूर्णांक हैं जिनसे $0 \leqslant m^{(i)} \leqslant q^{(i)}, 0 \leqslant n^{(i)} \leqslant p^{(i)}, qk \geqslant 0, 0 \leqslant n_k \leqslant p_k$ तुष्ट होते हैं। संकुल S_i-तल पर का कंटूर L_i मेलिन-बार्नीज प्रकार का है और वह अपने दंतुरों सहित $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक इस तरह विस्तीर्ण है कि यदि आवश्यकता पड़े तो $\Gamma(b_j^{(i)} - \beta_j^{(i)} s_i)$ $(j=1, \ldots, m^{(i)})$ के सारे पोल L_i के दाईं ओर पड़ें तथा $\Gamma(1-a_j^{(i)} + \alpha_j^{(i)} s_i)$ $(j=1, \ldots, n^{(i)})$, $\Gamma(1-a_{2j}+\sum_{i=1}^{2} \alpha_{2j}^{(i)} s_i)$ $(j=1, \ldots, n_2), \ldots, \Gamma(1-a_{rj}+\sum_{i=1}^{r} \alpha_{rj}^{(i)} s_i)$ $(j=1, \ldots, n_r)$ के पोल उसके बाईं ओर पड़ें।

कंटूर समाकल (1) अभिसारी होता है यदि

$$|\arg z_i| < \tfrac{1}{2} U_i \pi, \; U_i > 0, \; i=1, \ldots, r;$$

जहाँ

$$U_i = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)} - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{3j}^{(i)} - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} \alpha_{3j}^{(i)}\right) + \ldots$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj}^{(i)} - \sum_{j=n_s+1}^{p_r} \alpha_{rj}^{(i)}\right) - \left(\sum_{j=1}^{q_2} \beta_{2j}^{(i)} + \sum_{j=1}^{q_3} \beta_{3j}^{(i)} + \ldots + \sum_{j=1}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)}\right). \tag{5}$$

यहाँ हम कल्पना करते हैं कि दो अनुलग्नी प्राचलों में अर्थात् $\alpha_{rj}^{(i)}, \beta_{rj}^{(i)}$ मे ऊर्ध्व i प्रथम अधो अनुलग्न से बड़ी नहीं है। उदाहरणार्थ $\alpha_{2j}^{(i)}, \beta_{2j}^{(i)}, i=1, 2$ या $\alpha_{3j}^{(i)}, \beta_{3j}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ में गुणांक $\alpha_{kj}^{(i)}, \beta_{kj}^{(i)}$ में जहाँ $1 > k$ को शून्य माना जाता है।

ब्राक्समा[1] का अनुसरण करते हुए पुष्टि की जा सकती है कि

$$I[z_1, \ldots, z_r] = 0(|z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_r|^{\alpha_r}), \; \max\{|z_1|, \ldots, |z_r|\} \to 0$$

जहाँ

$$\alpha_1 = \min Re\left(\frac{b_j^{(i)}}{\beta_j^{(i)}}\right), j=1, \ldots, m^{(i)}, i=1, \ldots, r;$$

तथा

$$I[z_1, \ldots, z_r] = 0(|z_1|^{\beta_1} \ldots |z_r|^{\beta_r}), \min\{|z_1|, \ldots, |z_r|\} \to \infty$$

जहाँ

$$\beta_1 = \max Re\left(\frac{a_j^{(i)}-1}{\alpha_j^{(i)}}\right), j=1, \ldots, n^{(i)}, i=1, \ldots, r;$$
$$n_2 = n_3 = \ldots = n_r \equiv 0.$$

2- विशिष्ट दशायें

(i) $n_2=n_3=\ldots=n_{r-1}=0=p_2=p_3=\ldots=p_{r-1}$, तथा $q_2=q_3=\ldots=q_{r-1}=0$, लेने पर (1) द्वारा परिभाषित बहुचर I-फलन श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल[2] एवं प्रसाद तथा सिंह[3] द्वारा परिभाषित चिरप्रतिष्ठित बहुचर H-फलन में समानीत हो जाता है ।

(ii) (1) में $n_3=n_4=\ldots=n_r=0=p_3=p_4=\ldots=p_r$, $q_3=q_4=\ldots=q_r=0$, $m^{(i)}=n^{(i)}=q^{(i)}=p^{(i)}=0$, $i=3\ldots, r$ अर्थात् $r=2$ लेने पर बहुचर I-फलन मित्तल तथा गुप्ता[4] एवं प्रसाद तथा गुप्ता[5] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H-फलन में समानीत हो जाता है ।

(iii) (1) में $r=3$ लेने पर बहुचर I-फलन तीन चरों वाले I-फलन में समानीत हो जाता है । यदि हम और आगे $n_2=p_2=q_2=0$ लें तो यह तीन चरों वाला I-फलन तीन चरों वाले H-फलन में समानीत हो जाता है ।

(vi) (1) में $r=4, 5, \ldots$ लेने पर बहुचर I-फलन चार, पाँच... चरों वाले I-फलनों में समानीत हो जाता है ।

(v) पाँच चरों वाले I-फलन में $n_3=n_4=p_3=p_4=0, q_3=q_4=0$, $\alpha'_{5j}=\alpha''_{5j}=0 (j=1,\ldots,p_5)$ तथा $\beta'_{5j}=\beta''_{j}=0$ $(j=1,\ldots, q_5)$ लेने पर यह दो चरों वाले एक H-फलन तथा तीन चरों वाले एक H-फलन के गुणनफल में विखंडित हो जाता है ।

(vi) चार चरों वाले I-फलन में $n_3=p_3=0=q_3$, $\alpha'_{4j}=\alpha''_{4j}=0 (j=1, \ldots, p_4)$ तथा $\beta'_{4j}=\beta''_{4j}=0 (j=1, \ldots, q_4)$ लेने पर यह दो चरों वाले दो H-फलनों के गुणनफल में टूट जाता है ।

(vii) (1) में $n_2=n_3=\ldots=n_r=0=p_2=p_3=\ldots=p_r$, $q_2=q_3=\ldots=q_r=0$ लेने पर बहुचर I-फलन एक चर वाले rH-फलनों में गुणनफल में समानीत हो जाता है ।

3. बहुचरीय I-फलन तथा बहुचरीय H-फलन की तुलना

बहुचरीय I-फलन	बहुचरीय H-फलन
(i) इसमें $S_1 \ldots S_r$ के सभी सम्भव रैखिक संयोगों के गामा फलन निहित रहते हैं।	(i) इसमें $S_1 \ldots S_r$ के केवल एक रैखिक संयोग का गामा फलन निहित रहता है।
(ii) इसमें एक तथा दो अनुलग्न रहते हैं और प्राचलों की संख्या कम से कम हो जाती है।	(ii) इसमें एक अनुलग्न रहती है और कई प्राचलों की आवश्यकता होती है।
(iii) इसे मनवांछित कोटि के बहुचरीय H-फलनों के गुणनफलों में विभक्त किया जा सकता है।	(iii) इसे एक चर के H-फलनों के गुणनफलों में ही विभक्त किया जा सकता है।
(iv) यह वांछित संख्या के चरों वाले विशिष्ट फलनों के गुणनफलों में समानीत हो सकता है।	(iv) यह केवल एक विशिष्ट फलन में या एक चर के विशिष्ट फलनों के गुणनफलों में ही समानीत हो सकता है।

4. निष्कर्ष

लेखक ने जिस बहुचर I-फलन का सूत्रपात किया है वह अभी तक अनेक कार्यकर्ताओं द्वारा अध्ययन किये गये बहुचर H-फलन से अधिक सामान्य है। इससे शोध को नई दिशा प्राप्त हो सकती है।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Comp. Math., 1962, **15**, 239.
2. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The H-functions of one and two variables with applications· साउथ एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली, मद्रास, 1982, पृष्ठ 251.
3. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, ए० के०, The Journal of Scientific research, H. B. U., 1979-80, **30**, (1), 51.
4. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, Proc. Ind. Acad.Sci. A, 1972, **3**, 117.
5. प्रसाद, वाई० एन० तथा प्रसाद, एस०, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 1980, **33**(2), 41.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

7-पायरोलिडिनोमेथिल-8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन के साथ Cu (II), Ni (II), Co (II) तथा Mn (II) के संकर

कमल के० चतुर्वेदी तथा कु० मनोरमा गोयल
रसायन विभाग, होल्कर साइंस कालेज, इन्दौर (म० प्र०)

[प्राप्त—अप्रैल 25, 1985]

सारांश

7-पायरोलिडिनोमेथिल-8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन के Cu (II), Ni (II), Co (II) तथा Mn (II) संकर संश्लेषित किये गये और वैश्लेषिक, स्पेक्ट्रमीय, उष्मीय तथा चुम्बकीय मापनों द्वारा इन संकरों के लक्षण ज्ञात किये गये।

Abstract

Complexes of Cu (II), Ni (II), Co (II) and Mn (II) with 7-pyrrolidinomethyl-8-hydroxyquinoline. *By* Kamal K. Chaturvedi and Ku. Manorama Goyal, Department of Chemistry, Holkar Science College, Indore (M. P.).

Cu (II), Ni (II), Co (II) and Mn (II) complexes of 7-pyrrolidinomethyl-8-hydroxyquinoline have been synthesised. These complexes have been characterised by analytical, spectral, thermal and magnetic measurements.

मैनिक क्षारों से सम्बन्धि अपने पूर्ववर्ती कार्य [1-7] के सिलसिले में यहाँ पर हम 7-पायरोलिडिनोमेथिल-8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन (PYMHQ) के साथ Cu (II), Ni (II), Co (II) तथा M(II) के संकरों के वैश्लैषिक, i. r. , चुम्बकीय प्रवृत्ति, परावर्तन स्पेक्ट्रा तथा उष्माभारमितीय अध्ययन प्रस्तुत कर रहें हैं।

प्रयोगात्मक

जितने भी रसायन प्रयुक्त हुए वे वैश्लेषिक कोटि के थे ।

तत्वों के लिये विश्लेषण तथा भौतिक मापें

कार्बन तथा हाइड्रोजन का परिमापन दहन विधि से एवं नाइट्रोजन का परिवर्द्धित जेल्डाल विधि से किया गया[8] । संकरों में धातु की मात्रायें मानक विधियों[9] के द्वारा ज्ञात की गईं । कमरे के ताप पर चुम्बकीय प्रवृत्तियों का मापन गुई विधि से किया गया जिसमें $Co[Hg(SCN)_4]$ को अंशांकन के लिये प्रयुक्त किया गया । i.r. स्पेक्ट्रा का अंकन पर्किन-एल्मर स्पेक्ट्रोफोटोमीटर माडेल 337 द्वारा किया गया (परास 200-600cm^{-1}) ।

लिगैंड की तैयारी

पायरोलिडीन (0.02 मोल) में फार्मैल्डिहाइड (0.02 मोल) को निरन्तर हिलाते हुए डाला गया । मिश्रण को 15 मिनट तक शीतलित किया गया और तब 20 मिली॰ एथेनाल में बना 8-हाइड्रो-क्विनोलीन (0.22 मोल) मिलाया गया । अब एक बूँद सान्द्र HCl डालकर मिश्रण को 70-80°C पर 2 घंटे तक पश्चवाहित किया गया । ठंडा होने पर PYMHQ विलग हो जाता है जिसे ईथर विलायक के द्वारा क्रिस्टलित करके छान लिया जाता है और सुखाया जाता है । पीत पदार्थ के विश्लेषण करने से C,73.71; H, 6.95; N, 12.22 प्राप्त हुआ जब कि $C_{14}H_{16}N_2O$ के लिये 73.68, H, 7.01; N 12.28% चाहिये ।

संकरों की तैयारी

संकर बनाने के लिये कॉपर ऐसीटेट को डायोक्सन में घोला गया जबकि अन्य धातु ऐसीटेटों को 50%(v/w) डायोक्सन में घोला गया । लिगैंड का विलयन भी डायोक्सन में तैयार किया गया । धातु विलयन को लिगैंड विलयन में धीरे-धीरे 1 : 2 (M:L) मोलर अनुपात में मिलाया गया और विलोडित किया गया । इस प्रकार प्राप्त अवक्षेप को चूषण द्वारा छान कर अन्य अभिकर्मकों से मुक्त करके सुखा लिया गया है । सारणी 1 में रंग तथा वैश्लेषिक आँकडे दिये गये हैं, सारणी 2 में i.r. आँकडे हैं और सारणी 3 में चुम्बकीय घूर्ण आदि के आँकडे हैं ।

परिणाम तथा विवेचना

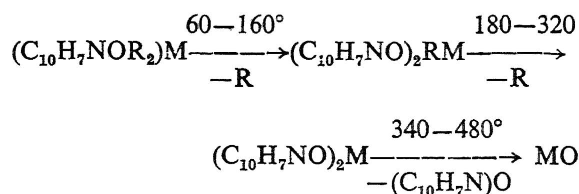
सारणी 1 में दिये गये वैश्लेषिक आँकडों से संकरों का सामान्य आनुभविक सूत्र $M[L]_2$ निकलता है जहाँ M=Cu (II), Ni (II),Co (II) तथा Mn (II) ।

सारणी 2 के परिणामों से पता चलता है कि 3680-3260 cm^{-1} के मध्य जो चौड़ा बैंड देखा जाता है वह PYMHQ में उपस्थित अन्तराणुक हाइड्रोजन बन्धों के लिये निर्दिष्ट है किन्तु यह इसके

सारे संकरों में अनुपस्थित है। इससे सूचित होता है कि संकरीकरण में फीनालिक आक्सीजन भाग लेता है और फीनाली हाइड्रोजन का विप्रोटानीकरण होता है। C=N तनन के कारण 1610 cm^{-1} पर मध्यम तीव्रता का एक बन्ध संकरीकरण के फलस्वरूप नीचे चला जाता है[10]। OH के कारण PYMHQ में 1410 cm^{-1} पर मध्यम तीव्रता का एक बैंड देखा जाता है किन्तु इसके संकरों में इनका अभाव रहता है। 1100 cm^{-1} पर लक्षित C—N तनन आवृति संकरीकरण के फलस्वरूप ऋणात्मक विचलन प्रदर्शित करती है। संकरीकरण के फलस्वरूप 1085 cm^{-1} पर प्रकट होने वाले ऐरिल आक्सीजन कम्पन उच्चतर आवृति की ओर चले जाते हैं। यह विचलन M—O—C तन्त्र के कारण हो सकता है[11]। संकरों में 560 ± 5, 490 ± 5, 350 ± 5 cm^{-1} पर मध्यम बैंड प्राप्त होते हैं जो क्रमशः M—O, M—N तथा M—N कम्पनों के लिये निर्दिष्ट हैं।

संकरों के चुम्बकीय घूर्ण मान प्रदर्शित करते हैं कि सारे धातु संकर अनुचुम्बकीय हैं। चुम्बकीय घूर्ण तथा परावर्तन स्पेक्ट्रा से (सारणी 3) अष्टफलकीय ज्यामिति होने की पुष्टि होती है। सारणी 4 में दिये गये मानों से ज्यामिति की और भी पुष्टि होती है[12–14]।

उष्मीय विश्लेषणों से पता चलता है कि धातु संकर 60°C तक स्थायी रहते हैं किन्तु इसके आगे विघटन शुरू हो जाता है अतएव यह निष्कर्ष निकाला जा कसता है कि संकरों के कमरे के ताप पर ही संश्लेषित करना चाहिये। समस्त संकरों का तापअपघटन तीन पदों में होता है जो इस प्रकार हैं



$$(C_{10}H_7NOR_2)M \xrightarrow[-R]{60-160^\circ} (C_{10}H_7NO)_2RM \xrightarrow[-R]{180-320}$$

$$(C_{10}H_7NO)_2M \xrightarrow[-(C_{10}H_7N)O]{340-480^\circ} MO$$

जहाँ $R=C_4H_8N$ तथा M=द्विसंयोजी Cu; Ni; Co तथा Mn।

धातु आक्साइड के अवशिष्ट भार से धातु : लिगैंड में 1:2 अनुपात देखा जाता है। उष्मीय स्थायित्व का क्रम Cu>Ni>Co>Mn पाया गया।

अतः निष्कर्ष यह निकला कि धातु-लिगैंड अनुपात 1:2 रहता है, लिगैंड एकक्षारी त्रिदंतुर की भाँति आचरण दिखलाता है, उनका उच्च स्पिन क्षीण क्षेत्र होता है तथा धातु आयन के चारों ओर की ज्यामिति अष्टफलकीय पाई जाती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

कु० मनोरमा गोयल को सीनियर रिसर्च फेलोशिप प्रदान करने के लिये लेखकद्वय देवी अहिल्या विश्वविद्यालय, इन्दौर के आभारी हैं।

सारणी 1

रंग तथा वैश्लेषिक आँकडे

यौगिक	रंग	%N प्राप्त (आवश्यक)	% धातु प्राप्त (आवश्यक)
$(C_{14}H_{15}N_2O)_2Cu$	हरा	5.37	12.34
		(5.41)	(12.28)
$(C_{14}H_{15}N_3O)_2Ni$	हरिताभ पीत	5.54	11.52
		(5.46)	(11.45)
$(C_{14}H_{15}N_2O)_2Co$	लालाभ•भूरा	5.52	11.44
		(5.56)	(11.49)
$(C_{14}H_{15}N_2O)_2Mn$	पीताभ भूरा	5.45	10.72
		(5.50)	(10.79)

सारणी 2

PYMHQ के अवरक्त स्पेक्ट्रा तथा (तरंग संख्यायें cm^{-1} में)

PYMHQ	Cu (II)	Ni (II)	Co (II),	Mn (II),	निर्दिष्टीकरण
3680—3260	—	—	—	—	$_v$OH (फीनालिक)
1610	1585	1590	1585	1590	$_v$C=N
1410	—	—	—	—	$_v$OH
1160	1145	1140	1145	1145	$_v$C—N
1085	1100	1100	1100	1105	$_v$C—O
—	550	545	550	550	M—O
—	490	490	495	490	M—N
—	350	350	345	345	M—N

सारणी 3

चुम्बकीय घूर्ण तथा परावर्तनता स्पेक्ट्रा

संकर	चुम्बकीय घूर्ण (B.M.)	बैंडों की स्थिति (cm^{-1})	निर्दिष्टीकरण (As signment)	ज्यामिति (Geometry)
Cu—PYMHQ	1.81	10471	$^2B_{1g} \rightarrow ^2A_{1g}$	
		11173	$^2B_{1g} \rightarrow ^2B_{2g}$	अष्टफलकीय
		14285	$^2B_{1g} \rightarrow 2E_g$	
Ni—PYMHQ	3.12	12280	$^3A_{2g} \rightarrow ^3T_{1g}(F)$	
		22471	$^3A_{2g} \rightarrow ^3T_{1g}(P)$	अष्टफलकीय
Co—PYMHQ	4.75	16129	$^4T_{1g} \rightarrow ^4A_{2g}(F)$	अष्टफलकीय
		18867	$^4T_{1g}(F) \rightarrow ^4T_{1g}(P)$	
Mn—PYMHQ	5.95	—	—	अष्टफलकीय

सारणी 4

लिगैंड क्षेत्र प्राचल

संकर	10Dq(cm^{-1})	B(cm^{-1})	β
Cu—PYMHQ	11173	—	—
Ni—PYMHQ	7740	804	0.74
Co—PYMHQ	8590	825	0.85

10Dq=क्रिस्टल क्षेत्र विदारक ऊर्जा

B=राखा का प्राचल

β=सहसंयोजकता का माप

निर्देश

1. चतुर्वेदी, कमल, के० तथा गोयल, मनोरमा, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1983, **26**(2) 83.

2. वही, **यूनिवर्सिटी इन्दोर रिसर्च जर्न०**, 1983, **8**(3), 92.

3. वही, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1984, **61**, 175.

4. वही, **वही**, 1984, **61**, 593.

5. वही, (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)

6. वही, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका** (प्रकाशनाधीन)

7. वही, (प्रेषित)

8. अशरफ, एम०, **टैलेन्टा**, 1968, **15**, 559.

9. वोगेल, ए० आई०, Quantitative Inorganic Analysis. ELBS लन्दन, 1978.

10. तिवारी, जी० डी० तथा मिश्रा, एम० एन० जे०, **इण्डियन केमि० सोसा०**, 1982, **59**, 362.

11. चार्ल्स, आर० जे०, फ्रीजर, एच०, फ्रीडेल, आर०, हिलियर्ड, एल० ई० तथा जान्स्टन, डब्लू० डी०, Spectrochim. Acta. 1956, **8**, 1.

12. लीवर, ए० बी० पी०, लेविस, जे० तथा नाइहोम, आर० एस०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1964, 4761.

13. अण्डरहिल, ए० ई० तथा बिलिंग, डी० ई०, **नेचर**, 1966, **210**, 834.

14. लीहर, ए० डी०, **जर्न० फिजि० केमि०**, 1963, **67**, 1314.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

सार्वीकृत स्ट्रूव फलन और हाइपरज्यामितीय फलनों में कुछ सम्बन्ध

आर० पी० सिंह

गणित विभाग, पी० एन० कालेज, परसा (सारण)-

[प्राप्त—18, नवम्बर 1985]

सारांश

प्रस्तुत शोध-पत्र में $H^{\lambda}_{v,k}(z)$ और कुछ हाइपरज्यामितीय फलनों में, λ के धनात्मक परिमेय मानों के लिये कुछ सम्बन्ध स्थापित किये गये हैं जहाँ $H^{\lambda}_{v,k}(z)$ सार्वीकृत स्ट्रूव फलन है जो निम्न-लिखित सूत्र द्वारा परिभाषित किया गया है

$$H^{\lambda}_{n,k}(z)=\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\,\Gamma(v/k+\lambda r+3/2)}$$

जहाँ $\lambda>0,\ k>0$.

$H^{\lambda}_{v,k}(z)$ सार्वीकृत फलन सिंह[1] द्वारा परिभाषित है ।

Abstract

Some relations in generalized Struve's function and Hypergeometric function. *By* R. P. Singh, Mathematics Departement, P. N. College, Parsa (Saran).

In this paper $H^{\lambda}_{v,k}(z)$ has been correlated with certain hypergeometric functions for a positive rational value of λ where $H^{\lambda}_{n,k}(z)$ has been defined to be the generalized Struve's function by the formula

$$H^{\lambda}_{v,k}(z)=\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\,\Gamma(v/k+\lambda r+3/2)}$$

where $\lambda>0,\ k>0$.

Above formula is given by Singh[1] and these results present the results of many mathematicians as special cases.

1. प्रस्तावना

स्ट्रूव फलन निम्नलिखित श्रेणी द्वारा परिभाषित है

$$H_v(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\,\Gamma(v+r+3/2)} \tag{1.1}$$

इसके कुछ गुणों का अध्ययन सीमान[2] तथा वाकर[3] द्वारा किया गया है।

$H_v(z)$ का सर्वीकरण भौमिक[4a] द्वारा किया गया जो इस प्रकार है

$$H_v^{\lambda}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\,\Gamma(v+\lambda r+3/2)} \tag{1.2}$$

जहाँ $\lambda>0$.

भौमिक [4b] ने इस सार्वीकृत स्ट्रूव फलन का अध्ययन विस्तारपूर्वक किया है।

भौमिक द्वारा सार्वीकृत फलन का सार्वीकरण सिंह द्वारा निम्नलिखित सूत्र द्वारा किया गया है

$$H_{v,k}^{\lambda}(s)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{v+2+\lambda+1}}{\Gamma(r+3/2)\,\Gamma(v/k+\lambda r+3/2)} \tag{1.3}$$

जहाँ $\lambda>0,\ k>0$

$k=1$ पर $H_{v,k}^{\lambda}(z)$ से $H_v^{\lambda}(z)$ प्राप्त होता है और $k=1$ एवं $\lambda=1$ से $H_v(z)$ प्राप्त हो जाता है।

2. λ के धनात्मक पूर्णांक मानों और $k>0$ के लिये सम्बन्ध

हम जानते हैं कि

$$H_{v,k}^{\lambda}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\,\Gamma(v/k+\lambda r+3/2)}$$

जहाँ λ एक धनात्मक पूर्णांक है और $k>0$.

गामा फलनों के गुणन-सूत्रों के प्रयोग से हमें प्राप्त होता है

$$\Gamma(v/k+\lambda r+3/2)=\frac{\lambda^{\lambda r+v/k+1}}{(2\lambda)^{\lambda-1/2}}\,\Gamma\left(r+\frac{2v+3k}{2k\lambda}\right)\Gamma\left(r+\frac{2v+5k}{2k\lambda}\right)\cdots\Gamma\left(r+\frac{2v+(2\pi+1)k}{2k\lambda}\right)$$

$$=\binom{\lambda}{\lambda}^{r}\left\{\frac{2v+3k}{2k\lambda}\right\}_r\left\{\frac{2v+5k}{2k\lambda}\right\}_r\cdots\left\{\frac{2v+(2\lambda+1)k}{2k\lambda}\right\}_r=\frac{\lambda^{v/k+1}}{(2\pi)^{\lambda-1/2}}\,\Gamma\left(\frac{2v+3k}{2k\lambda}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{2v+5k}{2k\lambda}\right)\cdots\Gamma\left[\frac{2v+(2\lambda+1)k}{2k\lambda}\right]$$

फिर

$$\Gamma\left\{\left(\frac{2v+3k}{2k\lambda}\right)\lambda\right\}=\Gamma\left(\frac{v}{k}+\frac{3}{2}\right)=\frac{\lambda^{v/k+1}}{(2\pi)^{\lambda-1/2}}\,\Gamma\left(\frac{2v+3k}{2k\lambda}\right)\cdots\Gamma\left\{\frac{2v+(2\lambda+1)k}{2k\lambda}\right\}.$$

अतः

$$H^{\lambda}_{v,k}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\left(\frac{v}{k}+\frac{3}{2}\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{v+2r+1}}{(\lambda^{\lambda})^r\,v!\,(3/2)_r\left\{\frac{2v+3k\lambda}{2k\lambda}\right\}_r}\left\{\frac{2v+(2\lambda+1)k}{2k\lambda}\right\}_r.$$

$$H^{\lambda}_{v,k}(z)=\frac{2(z/2)^{v+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(v/k+3/2)}\,{}_1F_{\lambda+1}\left[1;\frac{3}{2},\frac{2v+3k}{2k\lambda},\frac{2v+(2\lambda+1)}{2k\lambda};-\frac{z^2}{4\lambda^{\lambda}}\right]\qquad(2.1)$$

अतः परिणाम है।

विशेष दशाएँ

(क) (2.1) में $k=1$ रखने पर

$$H^{\lambda}_{v}(z)=\frac{2(z/2)^{v+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(v+3/2)}\,{}_1F_{\lambda+1}\left[1;\frac{3}{2},\frac{2v+3}{2\lambda},\ldots,\frac{2v+2\lambda+1}{2\lambda};-\frac{z^2}{4\lambda^{\lambda}}\right]$$

जो $H^{\lambda}_{v}(z)$ के लिये भौमिक[4c] द्वारा दिया हुआ ज्ञात सूत्र है।

(ख) (2.1) में $k=1$ तथा $\lambda=1$ रखने पर

$$H_v(z)=\frac{2(z/2)^{v+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(v+3/2)}\,{}_1F_2\left(1;\frac{3}{2},v+3/2;-\frac{z^2}{4}\right)$$

जो $H_v(z)$ के लिये वाटसन[5] द्वारा ज्ञात सूत्र है।

3. λ के धनात्मक परिमेय मानों और $k>0$ के लिये सम्बन्ध

माना कि $\lambda=p/q$, जहाँ p और q धनात्मक पूर्णांक है और $(p, q)=1$, $q\geqslant 1$ तो

$$H_{v_1k}^{p/q}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\ \Gamma\left(\frac{v}{k}+\left(\frac{p}{q}\right)r+\frac{3}{2}\right)} \tag{3.1}$$

चूँकि (3.1) द्वारा निरूपित श्रेणी चरम-अभिसरित है इसलिये इस श्रेणी को किसी भी विधि से पुनः व्यवस्थित कर सकते हैं। पुनः व्यवस्थित करने के उपरान्त

$$H_{v,k}^{p/q}(z)=\sum_{r=1}^{r=q-1}\frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\ \Gamma\left(\frac{v}{k}+\frac{d}{q}r+3/2\right)}$$

$$+\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$+\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$+\sum_{t=0}^{t=\alpha}\frac{(-1)^{qz}(z/^2)^{v+2qt\ +1}}{\Gamma\ \ (qt3/2)\ \Gamma\left(p^z+\frac{v}{k}+3/2\right)}$$

अथवा $$H_{v,k}^{p/q}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}F_n(z)+\sum_{t=0}^{t=\infty}\frac{(-1)^{qt}(z/2)^{v+2qt+2}}{\Gamma(qt+3/2)\ \Gamma\left(\frac{v}{k}+pt+3/2\right)}$$

जहाँ

$$F_n=\sum_{r=nq+1}^{r=(n+1)q-1}\frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\ \Gamma\left(\frac{v}{k}+\frac{p}{q}r+3/2\right)}$$

स्पष्टतः $\sum_{n=0}^{n=\infty}F_n(z)$ **एक** पूर्णतः अभिसारी है। अतः इसके पदों को किसी विधि से पुनः व्यवस्थित किया जा सकता है।

अतः

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} F_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nq+1}\,(z/2)^{v+2nq+3}}{\Gamma(nq+5/2)\,\Gamma(v/k+np+p/q+3/2)}$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nq+q-1}\,(z/2)^{v+2nq+2q-1}}{\Gamma(nq+q+1/2)\,\Gamma(v/k+np+p/q+3/2)}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(-1)^q\}^n\,(z/2)^{v+2nq+3}}{\Gamma(nq+5/2)\,\Gamma(v/k+np+p/q+3/2)}$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$+(-1)^{q-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(-1)^q\}^n\,(z/2)^{v+2nq+2q+1}}{\Gamma(nq+q+1/2)\,\Gamma(v/k+np+p-p/q+3/2)}$$

गामा फलनों में गुणन-सूत्रों का प्रयोग करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)=\frac{-(2\lambda-)^{p+q-2/2}\,(z/2)^{n+3}}{q^2\,p^{v/k+1+p/q}\,\Gamma\left(\frac{5}{2r}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2q+3}{2q}\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{v}{kp}+\frac{3}{2p}+\frac{1}{q}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{2p+1}{2p}\right)$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(-1)^q\}^n\,\{(2/q)^{2q}/p^p q^q\}^n}{\left(\frac{5}{2q}\right)_n\left(\frac{7}{2q}\right)_n\ldots\left(\frac{2q+3}{2q}\right)_n\left(\frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{3}{2p}\right)_n\ldots\left(\frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{2p+1}{2p}\right)_n},$$

$$\ldots\left(\frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{2p+1}{2p}\right)_n, +\ldots+(q-1) \text{ पदों तक}$$

पुनः

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} F_n[z]=\frac{-(z/2)^{v+3}}{\Gamma(5/2)\,\Gamma(v/k+p/q+3/2)}\ {}_1F_{p+q}\left[1:\frac{5}{2q},\ \frac{7}{2q},\ldots\right.$$

$$\frac{2q+3}{2q}, \ldots, \frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{3}{2p}, \ldots, \frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{2p+1}{2p}: \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^p}\Bigg]$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$+\frac{(-1)^{q-1} (z/2)^{v+2q-1}}{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right) \Gamma(v/k+p-p/q+3/2)} \ {}_1F_{p+q} \Bigg[1; \frac{1}{2q}+1, \ldots.$$

$$1+\frac{2q-1}{2q}, \frac{v}{kp}+1-\frac{1}{q}+\frac{3}{2y}, \ldots, \frac{v}{kp}+1-\frac{1}{q}+1 \ \frac{2p+1}{2p}, \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^q}\Bigg]$$

अब, फिर

$$\sum_{t=0}^{t=\infty} \frac{(-1)1^{qt} (z/2)^{v+2q+1}}{\Gamma(qt+3/2)\ \Gamma(v/k+pt+3/2)}$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{qt} (z/2)^{v+2qt+1}}{(q^q)^t\ \Gamma\left(t+\frac{3}{2q}\right) \ldots \Gamma\left(t+\frac{2q+1}{2q}\right)}$$

$$\times \frac{(2\pi)^{v+q-2}}{p^{v/k+1/q} (p^p)^t\ \Gamma\left(l+\frac{v}{kp}+\frac{3}{2p}\right) \ldots \Gamma\left(t+\frac{v}{kp}+\frac{2p+1}{2p}\right)}$$

$$=\frac{2\ (z/2)^{v+1}}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{v}{k}+3/2\right)} \ {}_1F_{p+q} \Bigg[1; \frac{3}{2q}, \frac{5}{2q}, \ldots, \frac{2q+1}{2q},$$

$$\frac{v}{kp}+\frac{3}{2p}, \ldots, \frac{v}{kp}+\frac{2p+1}{2p}; \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^q}\Bigg]$$

अन्ततः हम प्राप्त करते हैं कि

$$H_{v}^{p,q,k}(z)=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\ \Gamma(v|k+p/qr+3/2)} \tag{3.2}$$

$$=\frac{2(z/2)^{v+1}}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{v}{k}+3/2\right)} \ {}_1F_{p+q} \Bigg[1; \frac{3}{2q}, \frac{5}{2q}, \ldots \ \frac{2q+1}{2q}, \frac{v}{kp}+\frac{3}{2p},$$

$$\frac{v}{kp}+\frac{5}{2p}, \ldots, \frac{v}{kp}+\frac{2p+1}{zb} \ \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^q}\Bigg] - \frac{(z/2)^{v+3}}{\Gamma(5/2)\ \Gamma\left(v/p+\frac{p}{q}+3/2\right)}$$

$$\times {}_1F_{p+q}\left[1;\ \frac{5}{2q}, \frac{7}{2q}, \ldots, \frac{2q+3}{2q}, \frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{3}{2p}, \ldots, \frac{v}{kp}+\frac{1}{q}+\frac{2p+1}{2p};\ \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^q}\right]$$

$$+\quad -\quad -\quad -\quad -\quad -\quad -\quad +\quad -\quad -\quad -$$

$$+\frac{(-1)^{q-1}(z/2)^{v+2q+1}}{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{k}+p-p/q+3/2\right)}\ {}_1F_{p+q}\left[1;\ 1+\frac{1}{2q}, \ldots, 1+\frac{2q-1}{2q},\right.$$

$$\left.\frac{v}{2q}+1-\frac{1}{q}+\frac{3}{2p}, \ldots, \frac{v}{kp}+1-\frac{1}{q}+\frac{(2p+1)}{2p};\ \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^q q^q}\right].$$

अतः यह परिणाम है।

विशिष्ट दशाएँ

(क) (3.2) में $q=1$ रखने पर $\lambda=p$ प्राप्त होता है, जहाँ p एक धनात्मक पूर्णांक है, जो सम्बन्ध (2) है।

(ख) (3.2) में $k=1$ रखने पर

$$H_v^{p/q}(z)=\frac{2(z/2)^{v+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(v+3/2)}\ {}_1F_{p+q}\left[1;\ \frac{3}{2q}, \frac{5}{2q}, \ldots,\right.$$

$$\left.\frac{2q+1}{2q};\ \frac{v}{p}+\frac{3}{2p}, \ldots, \frac{v}{p}+\frac{2p+1}{p};\ \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^q}\right]$$

$$-\frac{(z/2)^{v+3}}{\Gamma(5/2)\,\Gamma(v+p/q+3/2)}\ {}_1F_{p+q}\left[1;\ \frac{5}{2q}, \frac{7}{2q}, \ldots, \frac{2q+3}{2q}, \frac{v}{p}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{q}+\frac{3}{2p}, \ldots, \frac{v}{p}+\frac{1}{q}+\frac{2p+1}{2q};\ \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^q}\right]$$

$$+\quad -\quad -\quad -\quad -\quad +\quad -\quad -\quad -\quad -$$

$$+\frac{(-1)^{q-1}(z/2)^{v+2q+1}}{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)\Gamma(v+p+3/2+p/q)}\ {}_1F_{p+q}\left[1;\ \frac{1}{2q}+1, \ldots,\right.$$

$$\left.1+\frac{2q-1}{2q}, \frac{v}{p}+1-\frac{1}{q}+\frac{3}{2p}, \ldots, \frac{v}{q}+1-\frac{1}{q}+\frac{(2p+1)}{2q};\ \frac{(-1)^q (z/2)^{2q}}{p^p q^q}\right]$$

जो $H_v^{\lambda}(z)$ के लिये भौमिक[4c] द्वारा ज्ञात सूत्र है।

निर्देश

1. सिंह, आर० पी०, **राँची यूनिवर्सिटी मैथ० जर्न०**, 1974, 5

2. सीमैन, Ahrbuch uber de Forts chritte der Math. 1880 p. 340-342.

3. वाकर, जे०, The Analytic theory of Light 1904, कैम्ब्रिज, p. 392-395.

4. (*a*) भौमिक, के० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1963, **6**, 1-11.
   (*b*) भौमिक, के० एन०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, 1963.
   (*c*) भौमिक, के० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1962, **5**, 93-99.

5. वाट्सन, जी० एन०, A Treatise on Bessel functions, कैम्ब्रिज यूनि० प्रेस, 1945.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika. Vol. 29, No. 4, 1986

नैफ्थेलीन का तापीय तथा वैद्युत अपघटन

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कालेज, मेरठ

[प्राप्त—दिसम्बर 30, 1985]

सारांश

नैफ्थेलीन का अपघटन प्रथम कोटि के अनुसार पाया गया है, जबकि वेग-स्थिरांक k के मान 680 तथा 710°C पर क्रमशः 0.0051 तथा 0.008 प्रति मिनट हैं। प्रकाशिक (500 वाट बल्ब) तथा वैद्युत (2.12kV पर स्लीव विसर्जन) उत्तेजनों से अपघटन बढ़ जाता है।

Abstract

Thermal and electrical decomposition of naphthalene. *By* Jagdish Prashad, Department of Chemistry, Meerut College, Meerut.

Naphthalene has been found to follow a first order decomposition, velocity constant k values at 680 and 710°C being 0·0051 and 0.008 min^{-1} respectively. The decomposition is enhanced under photo (500 watt bulb) and electrical (sleeve discharge at 2.12 kv) excitations.

नैफ्थेलीन वाष्प को एक लाल तप्त नली में प्रवाहित करने पर क्लैट्जिस्की[1] ने पाया कि उसका सूक्ष्मविभाजित कार्बन, मीथेन तथा डाइनैफ्थिल में अपघटित हो जाता है, जबकि बर्थेलो[2] का प्रेक्षण है कि इन परिस्थितियों में नैफ्थेलीन में कोई परिवर्तन नहीं होता। नैफ्थेलीन वाष्प में विसर्जन के स्पेक्ट्रमी अध्ययन के फलस्वरूप हार्किन्स तथा गैन्स[3] ने CH, C_2, C, H तथा C^+ की उपस्थिति को उद्घाटित किया; मुक्त मूलक अत्यन्त क्रियाशील थे और शीघ्र ही संयोग करके काले या भूरे वर्ण के यौगिकों में परिवर्तित हो गये। यह भी अनुमान लगाया गया कि विसर्जन के द्वारा इन कार्बनिक यौगिकों का अपघटन पृष्ठ की प्रकृति को बदल देता है, जो कि बहुलीकृत संकर यौगिकों की निर्मिति में सहायक होता है, वैद्युत उत्तेजन तथा बाह्य विकिरण द्वारा कार्बनिक वाष्पों के अपघटन की उल्लेखनीय संवेदनशीलता के कारण, नैफ्थेलीन का उष्मा, प्रकाश तथा वैद्युत विसर्जन द्वारा अपघटन का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

पाइरैक्स पात्र T (250 मिली) को एक ऐसे विद्युत द्वारा तप्त कक्ष B से परिबद्ध किया गया, जिसके एक सिरे पर परिबद्ध पात्र को इच्छानुसार किरणित करने के लिये काँच की एक गवाक्ष W लगी। थी कक्ष के आन्तरिक ताप के अभिलेखनार्थ एक Cr-Fe ताप-वैद्युत-युग्म लगा था।

सावधानीपूर्वक शोधित, अनुमानतः 2 ग्राम, ठोस नैफ्थेलीन (गलनांक 80°C) को बल्ब D में लिया गया, जिसको विद्युत द्वारा तप्त कक्ष C का ताप बढ़ाकर वाष्पित किया जा सकता था। नैफ्थेलीन वाष्प का द्रवण रोकने के लिये रोधनी S_1 तथा S_2 का ताप 100°C पर स्थिर रखा गया। रोधनी S_1 के द्वारा वाष्प को T में प्रविष्ट कराया गया, जिसका दाब पारद-मैनोमीटर M द्वारा मापा गया। प्रत्येक प्रयोग के पूर्व, समस्त उपकरण को टॉप्लर पंप द्वारा निर्वातित किया गया। मैनोमीटर M की कोशिका से प्रदर्शित दाब-परिवर्तन ($\triangle p$) के द्वारा अपघटन का अध्ययन किया गया; मैनोमीटर को 0.01 मिमी अल्पतमांक वाले कैथेटोमीटर की सहायता से पढ़ा गया। प्रयोग के ताप पर प्रारम्भिक दाब को लिख लिया गया। तापीय अपघटन का अध्ययन दो तापों 680 तथा 710°C पर किया गया। विसर्जन के प्रभाव के अध्ययन के लिये 0.2 मिमी Hg, 34°C पर नैफ्थेलीन वाष्प युक्त पात्र पर, 6.5 सेमी की अन्तः स्लीव-दूरी पर प्लैटिनम की दो वाह्य स्लीव लपेटी गईं, जिनको 2.12 kV rms द्वारा उत्तेजित किया गया। धारा i को प्रेरणिक युग्मित एक ऐसे सुग्राही परावर्तन धारामापी G से नापा गया, जिसका प्रवृत्तन क्रिस्टल 1N34 (सिल्वेनिया) द्वारा किया गया था। उपर्युक्त अध्ययनों को 680°C ($pC_{10}H_8$ =115 मिमी Hg) पर तथा T से 25 सेमी दूरी पर स्थित 500 वाट, 220 वोल्ट के बल्ब द्वारा किरणित दशाओं में दोहराया गया।

अपघटन उत्पादों का संसूचन

मीथेन : ऑक्सीजन की विद्यमानता में स्लीव विसर्जन (S) द्वारा मीथेन को फॉर्मैल्डिहाइड में ऑक्सीकृत किया गया। अवशिष्ट गैसों को टॉप्लर पंप द्वारा बाहर निकालकर, सिल्वर नाइट्रेट तथा क्यूप्रस क्लोराइड के द्वारा फॉर्मैल्डिहाइड तथा ऐसेटिलीन का क्रमशः परीक्षण किया गया।

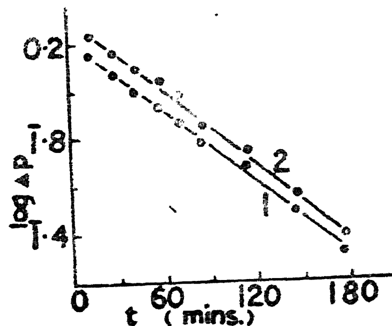
अभीष्ट हाइड्रोजन का परीक्षण निम्नांकित विधि से किया गया—

क्यूप्रिक ऑक्साइड तथा पोटैशियम हाइड्रोक्साइड (F) के पारस्परिक संगलन द्वारा निर्मित छल्ले को हाइड्रोजन के त्वरित ऑक्सीकरण के लिये प्रयुक्त किया गया। उत्पन्न जलवाष्प को अन्त में अव-शोषित किया गया। अभिकर्मक को बनाने के लिमे पहले ऑक्साइड को Pt लूप में संगलित किया गया और फिर पिघले हुये द्रव्य को लगभग समान मात्रा के ठोस हाइड्रोक्साइड से स्पर्शित किया गया। दोनों पदार्थों के संलीन होने और ठंडा करने पर एक चिकनी गहरे रंग की मणिका प्राप्त हुई। इस ठोस की उपस्थिति में, परीक्षार्थ हाइड्रोजनयुक्त गैस के नमूने को 3.5 ऐम्पियर धारा वाले Pt तंतु से तप्त करने पर, हाइड्रोजन का शीघ्र ऑक्सीकरण हो गया और अभिक्रिया में उत्पन्न जल दृष्टिगोचर हुआ।

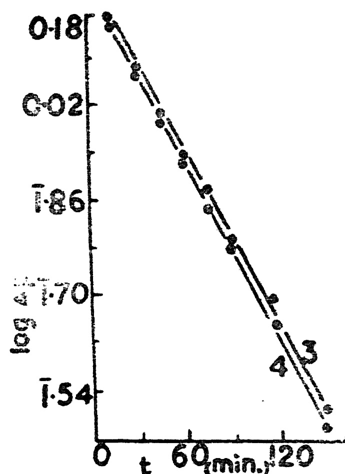
कैथेटोमीटर द्वारा प्रदर्शित दाब-परिवर्तनों से हाइड्रोजन की विद्यमानता की संपुष्टि हुई। किसी प्रदत्त समय में प्रारम्भिक मुक्त ऑक्सीजन की मात्रा के निर्धारण के लिये एक 'ब्लैंक' प्रयोग का सम्पादन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

अपघटन के दौरान, दाब इस प्रकार से बढ़ता है जिस प्रकार से कि प्रथम कोटि की रासायनिक अभिक्रिया के लिये वांछनीय है। 680 तथा 710°C पर वेग-स्थिरांक k के मान क्रमशः 0.0051 तथा 0.008 प्रति मिनट हैं, जोकि 27.98 किलो कैलोरी की सक्रियण ऊर्जा के तुल्य है। $t_{0\cdot5}$ तथा $t_{0\cdot25}$ के



चित्र 1 : 680 तथा 710°C पर नैफ्थेलीन का log △p तथा time t का विचरण (वक्र 1 : 680°C पर k=0.0051 प्रति मिनट; वक्र 2 : 710°C पर k=0.008 प्रति मिनट)।



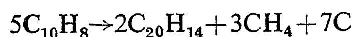
चित्र 2 : 680°C नैफ्थेलीन का प्रकाशिक वैद्युत अपघटन (वक्र 3 : किरणन के अंतर्गत, k=0.0052 प्रति मिनट; वक्र 4 : 2.12 kV पर स्लीव विसर्जन के अंतर्गत k=0.0051 प्रति मिनट)।

अनुपात का औसत मान 1.38 आया और लगभग समस्त अभिक्रिया के लिये $\log (\triangle pC_{10}H_8)$ तथा समय t का रैखिक आलेख प्राप्त हुआ (चित्र 1 तथा 2)।

2.12 kV पर 4 घन्टे के विसर्जन से नैफ्थेलीन दीप्ति कम हो गई और एक अवस्था आने पर विसर्जन को बनाये रखने के लिये उच्चतर विभवों की अपेक्षा हुई। क्योंकि i का मान अतिवोल्टता V—Vm पर निर्भर है[4–7], जबकि V तथा Vg क्रमशः अनुप्रयुक्त तथा भंजक देहली-विभव हैं, किसी v पर i में ह्रास, Vm में वृद्धि के फलस्वरूप है। अपघटन के कारण दाब में हुई वृद्धि अत्यन्त क्षुद्र कोटि की थी, यथा 2.12kV पर सतत् उत्तेजन से 270 मिनट में 0.03 मिमी की दाब-वृद्धि हुई। तथापि, 680°C ताप पर नली के किरणन से दाब-वृद्धि का वेग 0.0112 मिमी प्रति मिनट अर्थात् पर्याप्त था। पात्र T के किरणन से दाब में अधिक वृद्धि हुई।

4 घन्टे के अनवरत विसर्जन के फलस्वरूप पात्र की भित्तियों पर काली-भूरी, चमकीली, अगलनीय ठोस सम्भवतः कार्बन की पर्त जम गई, जोकि बेंजीन, ऐल्कोहॉल, क्लोरोफॉर्म तथा कार्बन टेट्राक्लोराइड सदृश समस्त सामान्य कार्बनिक विलायकों में अविलेय थी। मीथेन की उपस्थिति का प्रमाण उपलब्ध किया गया और ऐसेटिलीन संसूचित नहीं हुई। तापीय वैद्युत अपघटन से निर्मित उत्पाद मीथेन तथा कार्बन और सम्भवतः डाइनैफ्थिल हैं।

अतएव नैफ्थेलीन के अपघटन की क्रिया-विधि का प्रस्ताव निम्नलिखित है :



$$5C_{10}H_8 \rightarrow 2C_{20}H_{14} + 3CH_4 + 7C$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० पी० एस० राव के अमूल्य सुझावों के लिये लेखक आभारी है।

निर्देश

1. क्लैट्जिकस्की, के०, **जेहेरेसबर्जर**, 1866, 561.
2. बर्थेलो, डी०. **बुल० सोसा० किम०**, 1876, **26**, 101.
3. हार्किंस, डब्लू० डी० तथा गैन्स, डी० एम०, **जर्न० अमेरि० केमि० सोसा०**, 1930, **52**, 5165.
4. जोशी, एस० एम०, **प्रोसि० इन्डियन साइंस कॉंग्रेस**, केमि० सेक्शन, 1943, 51.
5. प्रसाद, जे०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय 1961, पृष्ठ 125.
6. प्रसाद, जे०, **जर्न० साइंस रिस०**, गुरुकुल काँगडी विश्वविद्यालय, 1973, **5-1**, 42.
7. प्रसाद, जे०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1981, **24**, 73.

Vnaijan Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

निलम्बित कणों की उपस्थिति में सरंध्र माध्यम में से श्यान प्लाज्मा का गुरुत्वीय अस्थायित्व

आर० के० संघवी तथा आर० के० छजलानी
भौतिकी अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन (म० प्र०)

[प्राप्त—अप्रैल 12, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में निलम्बित कणों की उपस्थिति में सरंध्र माध्यम में से होकर एक अनन्त समांग, श्यान तथा अनन्त चालक प्लाज्मा के गुरुत्वीय अस्थायित्व की विवेचना की गई है। नार्मल विधा विश्लेषण का प्रयोग करते हुये ऐसे माध्यम के लिये विक्षेपण सम्बन्ध प्राप्त किया गया है। यह देखा गया कि माध्यम की रंध्रता एवं निलम्वित कणों की उपस्थिति से गुरुत्वीय अस्थायित्व के जीन्स मानदण्ड पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता।

Abstract

Gravitational instability of a viscid plasma through porous medium in the presence of suspended particles. *By* R. K. Sanghvi and R. K. Chhajlani, School of Studies in Physics, Vikram University, Ujjain (M. P.).

The present paper discusses the gravitational instability of an infinite homogeneous, viscid and infinitely conducting plasma through a porous medium including the effect of suspended particles. Dispersion relati on for such a medium has been obtained using normal mode analysis. It is found that the presence of porosity of the medium and the supended particles does not essentially affect the Jeans criterion of the gravitational instability. However, the porosity of the medium and the suspended particles do modify certain modes of wave propagation which have been discussed analytically.

प्रयोगशाला तथा ऐस्ट्रोफिजिकल प्लाज्मा में धूल तथा निलम्बित कणों की भूमिका के औचित्य पर बल दिया गया है।[1] सर्वप्रथम जीन्स[2] ने अनन्त समांग अश्यान माध्यम के आत्म गुरुत्वीय आकर्षण से उत्पन्न अस्थायित्व पर विचार किया। चन्द्रशेखर[3] ने हाइड्रोडाइनैमिक्स तथा हाइड्रोमैग्नेटिक्स के क्षेत्र

में ऐसी समस्याओं पर विचार किया। शीडेगर[4] सरंध्र माध्यम में से प्रवाह की भौतिकी का सम्यक विवेचन किया है। अन्तर्ग्रहीय धूल पुच्छल तारे तथा पिण्डों के भौतिक गुणों से सरंध्र माध्यम की उपयोगिता स्पष्ट होती है।[5] अन्यों ने भी[6–8] इस विषय पर विभिन्न दृष्टियों से विचार किया है। यहाँ हम निलम्बित कणों समेत एक सरंध्र श्यान माध्यम में से होकर प्रवाह के गुरुत्वीय अस्थायित्व का विश्लेषण करने की प्रस्तावना करते हैं।

समस्या के समीकरण तथा रेखीकरण

हम निलम्बित कणों की उपस्थिति में सरंध्र माध्यम में से होकर एक अनन्तः, समांग, आत्म-गुरुत्वीय, श्यान तथा अनन्त चालक प्लाज्मा पर विचार करेंगे। हमने कल्पना की है कि सारे कण एक समान आकार के, गोलाकार तथा अल्प सापेक्ष वेग वाले हैं। तब प्रति इकाई आयतन पर अधि-पिंड-वल $KN(\vec{v}-\vec{u})$ गैस के त्वरण स्थानान्तरण समीकरण में जुड़ जाता है जो गैस पर कणों के प्रभाव के रूप में होता है। स्थिरांक K को स्टोक्स ड्रैग सूत्र $K=6\pi\rho\nu r$ द्वारा दिया जाता है जिसमें r कण की त्रिज्या है, ν गतिज श्यानता है स्वच्छ गैस की $\vec{u}$ तथा $\vec{v}$ गैस का कण वेग क्षेत्र हैं, ρ तथा N गैस घनत्व तथा कणों की संख्या घनत्व हैं।

गैस कण माध्यम के लिये गति का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\rho\frac{d\vec{t}}{du}=-\nabla p+\rho\nabla U+\rho\nu\nabla^2 u-\frac{\rho\nu}{k_1}\vec{u}+KN(\vec{v}-\vec{u}) \tag{1}$$

जहाँ संकेत p, U तथा k_1 क्रमशः दाब, आत्म गुरुत्वीय आकर्षण तथा माध्यम की प्रवेश्यता हैं। संपीड्य माध्यम के लिये सांतत्य समीकरण होगा

$$\epsilon\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla.\vec{u}=0 \tag{2}$$

जहाँ ϵ माध्यम की सरंध्रता का द्योतक है।

कणों के बीच की दूरी को उनके व्यास की तुलना में अत्यन्त दीर्घ माना जाता है जिससे अन्तराकण अभिक्रियाओं पर विचार करने की आवश्यकता नहीं रह जाती। दो मुक्त सीमाओं के लिये उत्प्लावन वल का स्थायित्वकारी प्रभाव नगण्य होता है अतएव इस पर भी विचार नहीं किया गया। वैद्युत वलों को भी छोड़ दिया गया है। ऐसे प्रतिवन्धों के अन्तर्गत कणों की गति तथा सांसत्य के मूलभूत समीकरण इस प्रकार हैं :

$$mN\frac{d\vec{v}}{dt}=KN(\vec{u}-\vec{v}) \tag{3}$$

$$-\frac{\partial N}{\partial t}+\nabla.(N\vec{v})=0 \tag{4}$$

जहाँ mN कणों का द्रव्यमात्त है प्रति इकाई आयतन में। यदि c_s माध्यम में ध्वनि वेग को सूचित करें तो

$$p = c_s^2 \rho \tag{5}$$

यही नहीं, गुरुत्वीय विभव को निम्नलिखित समीकरण की तुष्टि करनी चाहिये :

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho. \tag{6}$$

माना कि प्रणाली की प्रारम्भिक दशा को अनुलग्न 0 द्वारा अंकित किया जावे और इसे एक-समान कण वितरण से युक्त शीत स्तर मान लिया जाय। इस प्रकार

$$\vec{u}_0 = 0,\ \vec{v}_0 = 0,\ N_0 = \text{स्थिरांक} \tag{7}$$

से प्रणाली की प्रारम्भिक अवस्था का वर्णन हो जाता है। प्रणाली के स्थायित्व का अध्ययन पूरे समीकरणों का हल लिखकर किया जाता है जिसमें प्रारम्भिक अवस्था तथा क्षोभ सम्मिलित रहते हैं, अर्थात्

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u},\ p = p_0 + \delta p,\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v},\ \rho = \rho_0 + \delta\rho,$$

$$U = U_0 + \delta U \tag{8}$$

जहाँ $\vec{u}(u, v, w)$, δp, $\delta\rho$ तथा δU तरल के वेग में क्षोभों को बतलाते हैं तथा p दाब, ρ घनत्व तथा U गुरुत्वीय विभव हैं।

समीकरण (8) में कल्पित क्षोभों को हम समीकरण (1) से (6) तक रखते हैं और द्वितीय कोटि की संख्याओं की उपेक्षा करते हुये उनका रेखीकरण करते हैं। हम साम्य संख्याओं में से अनुलगन 0 भी निकाल देते हैं।

इस प्रकार हस्तगत समस्या के लिये प्राप्त रेखीकृत क्षोभ समीकरण इस प्रकार हैं :

$$\frac{\rho\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla\delta p + \rho\nabla\delta U + \rho\nu\nabla^2 \vec{u} - \frac{\rho\nu}{k_1}\vec{u} + KN(\vec{v} - \vec{u}) \tag{9}$$

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho = -\rho\nabla \cdot \vec{u}, \tag{10}$$

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho, \tag{11}$$

$$\nabla^2 \delta U = -4\pi G \delta\rho, \tag{12}$$

$$\left(\tau \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) \vec{v} = \vec{u}, \tag{13}$$

जहाँ $\tau(=m/k)$ द्वारा निलम्बित कणों का विश्रान्ति काल सूचित होता है ।

विक्षेपण सम्बन्ध तथा विवेचना

हम मान लेते हैं कि क्षोभित संख्यायें निम्नवत् विचरण करती हैं :

$$\exp i\,(k_x x + k_z z + \sigma t) \tag{14}$$

जहाँ k_x तथा k_z x तथा z दिशाओं की सीध में क्षोभों की तरंग संख्याओं को सूचित करते हैं और σ हार्मोनिक विक्षोभ की वृद्धि दर को सूचित करता है ।

अब (9)-(13) समीकरणों में समीकरण (14) को प्रयुक्त करने पर

$$\left[-\tau\sigma^2 + i\sigma P + \left(\frac{\nu}{k_1} + \nu k^2 \right) \right] u = \frac{-ik_x}{k^2} \Omega^2 j (1 + i\sigma\tau)\, s, \tag{15}$$

$$\left[-\tau\sigma^2 + i\sigma P + \left(\frac{\nu}{k_1} + \nu k^2 \right) \right] v = O, \tag{16}$$

$$\left[-\tau\sigma^2 + i\sigma P + \left(\frac{\nu}{k_1} + \nu k^2 \right) \right] w = \frac{-ik_z \Omega^2 j}{k^2} (1 + i\sigma\tau)\, s, \tag{17}$$

जहाँ

$$P = \left[+1 \left(\frac{\nu}{k_1} + \nu k^2 \right) \tau + a_0\, \tau \right] \tag{17}$$

$a_0\,\tau = \dfrac{\tau K N}{\rho}$ सूचक है निलम्बित कणों की द्रव्यमान सान्द्रता का,

$\Omega j^2 = \left(c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho \right)$, $s = \dfrac{\delta\rho}{\rho}$ सूचक है माध्यम में संघनन का तथा

$k^2 = k_x^2 + k_z^2$.

समीकरण (9) का डाइवर्जेन्स लेने, तदुपरान्त (9)-(14) समीकरणों का उपयोग करने पर

$$\left[\epsilon\,(i\sigma)^2 + \epsilon i\sigma \left(\frac{\nu}{k_1} + \nu k^2 \right) + \Omega_j^2 + \frac{a_0 \epsilon \tau (i\sigma)^2}{(1 + i\sigma\tau)} \right] s = o, \tag{18}$$

समीकरण (15)-(18) को निम्नलिखित मैट्रिक्स सूचन द्वारा लिखा जा सकता है

$$\begin{bmatrix} A & O & O & ik_x\Omega_j^2(1+i\sigma\tau) \\ O & A & O & O \\ O & O & A & \dfrac{ik_x\Omega^2 j(1+i\sigma\tau)}{k^2} \\ O & O & O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ s \end{bmatrix} = O \quad (19)$$

जहाँ हमने निम्नलिखित संक्षिप्तियों को व्यवहृत किया है

$$A=\left[-\tau\sigma^2+i\sigma P+\left(\frac{v}{k_1}+v k^2\right)\right]$$

$$B=\left[\epsilon(i\sigma)^2+\epsilon i\sigma\left(\frac{v}{k_1}+v k^2\right)+\Omega_j^2+\frac{\epsilon(i\sigma)^2\tau\alpha_0}{(1+i\sigma\tau)}\right],$$

मैट्रिक्स (19) के डिर्टमिनैन्ट (सारणिक) से निम्नलिखित अ-तुच्छ हल प्राप्त होता है

$$\left[-\tau\sigma^2+i\sigma P+\left(\frac{v}{k_1}+vk^2\right)\right]^3$$

$$\times\left[\epsilon(i\sigma)^2+\epsilon i\sigma\left(\frac{v}{k_1}+vk^2\right)+\Omega_j^2+\frac{\alpha_0\tau\epsilon(i\sigma)^2}{(1+i\sigma\tau)}\right]=O \quad (20)$$

जो बांछित परिक्षेपण सम्बन्ध है। उपर्युक्त सम्बन्ध लोपमान श्यानता की सीमा ($v=0$) पर शर्मा तथा ठाकुर[7] के परिणाम में समानीत हो जाता है।

हम दो कारकों वाले परिक्षेप्ण सम्बन्ध (20) को लेते हैं।

P का मान पुनः रखने पर पहले गुणक का स्वरूप इस प्रकार हो जाता है

$$\left[-\tau\sigma^2+i\sigma\left\{1+\left(\frac{v}{k_1}+vk^2\right)\tau+\alpha_0\tau\right\}+\left(\frac{v}{k_1}+vk^2\right)\right]=O \quad (21)$$

यह तरंग के चालन की ऐसी विधा को प्रदर्शित करता है जो विश्रान्तिकाल (τ) तथा परिक्षेपित कणों की द्रव्यमान सान्द्रता तथा माध्यम की श्यानता पर आश्रित है। यह देखा जाता है कि यह तरंग चालन माध्यम की सरंध्रता (ϵ) तथा आत्म-गुरुत्वीय आकर्षण ($\Omega^2 j$) पर निर्भर नहीं है। समीकरण (21) को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\tau W^2+W\left[1+\left(\frac{v}{k_1}+vk^2\right)\tau+\alpha_0\tau\right]+\left(\frac{v}{k_1}+vk^2\right)=O \quad (22)$$

जहाँ $W=i\sigma$.

स्पष्ट है कि इस द्विघात समीकरण के दो मूल हैं जिनका निर्धारण

$$W=-\tfrac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)\tau+\alpha_0\tau\right]\pm\left\{\left[1+\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)\tau+\alpha_0\tau\right]^{2}\right.$$

$$\left.-4\tau\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)\right\}^{1/2}\tau^{-1/2} \tag{23}$$

द्वारा किया जाता है। यदि प्रतिबन्ध

$$\left[1+\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)\tau+\alpha_0\tau\right]>4\tau\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right) \tag{34}$$

तुष्ट हो तो हमें आवर्ती दोलन प्राप्त होते हैं जो गुणक

$$\exp -\tfrac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)+\alpha_0\tau\right]t$$

द्वारा शामित होते हैं और यदि

$$\left[1+\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)\tau+\alpha_0\tau\right]<4\tau\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right) \tag{25}$$

तो समीकरण (23) के हलों से निम्न प्रकार क्वेंचिंग (शामन) प्राप्त होगा

$$\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)^2\tau+\alpha_0\tau\right]\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)+\alpha_0\tau\right\}^2/4-4\tau\left(\frac{\nu}{k_1}+\nu k^2\right)}\right\}t.$$

अतएव हम पाते हैं कि समीकरण (24) तथा (25) द्वारा दिये गये दोनों प्रतिबन्थों के अन्तर्गत समीकरण (23) के मूल तरंग संचरण की स्थायी विधाओं को व्यक्त करते हैं अतएव विचाराधीन माध्यम में अस्थायित्व उत्पन्न नहीं करेंगे।

निलम्बित कणों की अनुपस्थिति में ($\tau=o$), समीकरण (15) से तरंग संचरण की निम्नलिखित विधा प्राप्त होती है

$$W=-\left(\frac{\nu}{k^2}+\nu k^2\right) \tag{26}$$

जो अवमंदित विधा है जो माध्यम की श्यानता तथा प्रवेश्यता द्वारा उत्पन्न है और इसमें विचारगत विन्यास में कोई अस्थायित्व नहीं आता ।

अब हम विक्षेपण सम्बन्ध (20) के द्वितीय गुणक पर विचार करेंगे । $i\sigma = w$ रखने पर यह निम्न रूप धारण कर लेता है

$$\epsilon\tau W^3 + W^2\epsilon\left[1 + \left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)\tau + \alpha_0\tau\right]$$
$$+ W\left[\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)\epsilon + \tau\Omega_j^2\right] + \Omega_j^2 = O \qquad (27)$$

हम देखते हैं कि तरंग संचरण की इस विधा में माध्यम की रंध्रता निहित है । निलम्बित कणों के प्रभाव को निश्चित करने वाले प्राचल α_0 तथा τ हैं, माध्यम की श्यानता (v) तथा आत्म गुरुत्वीय आकर्षण (Ω^2_j) हैं ।

$\Omega^2_j > 0$ होने पर हम पाते हैं समीकरण (20) के गुणांक तथा परम पद धनात्मक वास्तविक हैं अतएव तीन ऋणात्मक मूल हो सकते हैं अथवा एक ऋणात्मक वास्तविक मूल तथा दो सम्मिश्र संयुग्मीं मूल होंगे । बाद वाली सम्भावना में समीकरण का रूप निम्नवत् होगा

$$8\alpha^3\epsilon^2\tau^2 + 8\alpha^2\epsilon^2\tau\left[\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right) + \alpha_0\right]$$
$$+ 2\alpha\left\{\sigma\tau\left[\left(\frac{v}{k^1} + vk^2\right)\epsilon + \tau\Omega_j^2\right] + \epsilon\left[\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)^2 + \alpha_0\tau\right]^2\right\}$$
$$+ \left\{\epsilon^2\left[\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)^2 \tau + \alpha_0\tau\right]\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right) + \epsilon\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)\tau^2\Omega_j^2\right\} = O \qquad (28)$$

हम निलम्बित कणों की अनुपस्थिति में (27) को सिद्ध करेंगे अर्थात् $\tau = 0$ जिससे हमें प्राप्त होगा

$$W^2\epsilon + W\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)\epsilon + \Omega_j^2 = O \qquad (29)$$

जो सरंध्रता (ϵ), श्यानता (v), प्रवेश्यता (k_1) के प्रभावों एवं माध्यम के आत्म गुरुत्वीय आकर्षण को बताता है । तरंग संचरण की विधियों को समीकरण (29) के निम्नलिखित मूलों (roots) द्वारा निर्धारित किया जाता है

$$W = -\frac{\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)\epsilon \pm \sqrt{\left(\left(\frac{v}{k_1} + vk^2\right)^2 \epsilon^2 - 4\epsilon\Omega_j^2\right)}}{2\epsilon} \qquad (30)$$

$\Omega^2_j > 0$ होने पर समीकरण (29) का उपर्युक्त हल या तो दोनों ऋणात्मक मूलों को स्वीकार करता है या अन्यथा। किन्तु जब $\Omega^2_j < 0$, तो इसमें कम से कम एक धनात्मक वास्तविक मूल होगा। साथ ही समीकरण (28) परिक्षिप्त कणों में अभाव में

$$W^2 + \Omega_j^2 = 0 \tag{31}$$

में समानीत हो जावेगा जिसकी व्याख्या चन्द्रशेखर ने की है।[3]

उपर्युक्त विवेचना से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $\Omega^2_j > 0$ या $\Omega^2_j < 0$. के अनुसार विचाराधीन माध्यम स्थायी या अस्थायी होता है। इस प्रकार गुरुत्वीय अस्थायित्व सामान्य जीन्स मानदण्ड वैध बना रहता है भले ही हम अनन्त समांग सरंध्र माध्यम पर विचार क्यों न करें और उसमें कतिपय निलम्बित कणों की उपस्थिति को अनुमति दें।

इस प्रकार हमने निम्बलित कणों की उपस्थिति में सरंध्र माध्यम में से होकर श्यान तरल के आत्मगुरुत्वीय अस्थायित्व का विश्लेषण किया है जिसमें हमने दिखलाया है कि $\Omega^2_j \gtrless 0$ के अनुसार माध्यम स्थायी या अस्थायी होता है अर्थात् माध्यम के स्थायित्व को जीन्स मानदण्ड $\Omega^2_j < 0$ के द्वारा निर्धारित किया जाता है जिससे निम्नलिखित क्रांतिक तरंग संख्या प्राप्त होती है

$$k_j = \sqrt{\left(\frac{4\pi G\rho}{c^2_s}\right)} \tag{32}$$

माध्यम समस्त तरंग संख्याओं $k < k_j$ के लिये अस्थायी है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय में एक (संघवी) यू० जी० सी० द्वारा आर्थिक सहायता के लिये आभार प्रकट करता है। दोनों लेखक प्रो० एम० पी० वर्मा प्रोत्साहन प्रदान किये जाने के लिये भी आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. आल्फवेन, एच० तथा कार्लक्विस्ट, पी०, Astrophys. Space Sc., 1978, **55**, 487.
2. जीन्स, जे० एच०, Trans. Roy. Soc. London, 1902, **199**, 1.
3. चन्द्रशेखर, एस०, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, क्लरेन्डन प्रेस आक्सफोर्ड, 1961 अध्याय XI.
4. शीडेगर, ए० ई०, The Physics of flow through porous media, यूनिवर्सिटी टोरन्टो, प्रेस, 1960.
5. मकडोनेल, जे० ए० एम०, Cosmic Dust, जानविले एण्ड सन्स, 1978, पृ०, 330.
6. शर्मा, आर० सी० तथा ठाकुर के० पी०, Astrophys. Space Sc., 1982, **81**, 95.
7. स्कैनलन, जे० डब्लू० तथा सेगेल, ई० ए०, Phys. Fluids, 1973, **16**, 1573.
8. छजलाकी, आर० के० तथा संघवी, आर० के०, Astrophys. Space Sc., 1985, **113**, 341.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

वेनिलीन तथा एथिलीन डाइऐमीन के 2 : 1 शिफ क्षारक तथा इसके ZrO^{++} संकुल का विभवमापी अध्ययन

पुरुषोत्तम बी० चक्रवर्त्ती तथा अशोक कुमर मैनी

स्नातकोत्तर एवं शोध प्रयोगशाला, रसायन विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—मई 2, 1986]

सारांश

वेनीलीन और एथिलीन डाइऐमीन के 2 : 1 आणविक अनुपात में संघनन से बने शिफ क्षारक के प्रोटॉन लीगैंड सम्भवन स्थिरांक 35° तथा 45° से० एवं 0.1M (KNO_3) आयनिक सांद्रता पर इर्विंग-रोसोटी विधि द्वारा परिकलित किये गये। साथ ही ZrO^{++} आयन के साथ इसके संकुलन की अभिक्रिया इन्हीं परिस्थितियों में अध्ययन की गयी तथा संकुल का स्थायित्व स्थिरांक निकाला गया।

Abstract

Potentiometric study of 2 : 1 Schiff base of vanillin with ethylene diamine and its ZrO^{++} complex. *By* Purshottam B. Chakrawarti and Ashok Kumar Maini, Chemical Laboratries, Motilal Vigyan Mahavidyalya, Bhopal, (M. P.).

Proton-ligand and metal-ligand formation constants of Van-en (a Schiff-base derived from condensation of vanillin and ethylene di-amine in 2 : 1 ratio) and its ZrO^{++} complex have been calculated at 35° and 45°C and at 0.1M (KNO_3) ionic strength.

In acidic medium the ligand exists as a di-protonated species; thus showing four steps of its ionisation.

एथिलीन डाइऐमीन अनेक ऐलिफैटिक तथा ऐरोमेटिक ऐल्डिहाइड तथा कीटोनों से क्रिया करके बहुदन्तीय शिफ क्षारक बनाता है। इसके सैलिसिलाल्डिहाइड के साथ बने शिफ क्षारक तथा उसके धातु संकुलों का विस्तृत रूप से अध्ययन किया गया है।[1–12] किन्तु वेनिलीन और एथिलीन डाइऐमीन के संघनन से बने शिफ क्षारक के व्यवहार के सम्बन्ध में विस्तृत जानकारी साहित्य में उपलब्ध नहीं है।

हाल ही में इस शिफ क्षारक के ताम्र[13] एवं कोबाल्ट[14] संकुलों का वर्णक्रमलेखीय अध्ययन प्रस्तुत किया गया है पर इसके प्रोटान लीगैंड सम्भवन स्थिरांक तथा धातु आयन के साथ संकुलन की क्रिया-विधि पर कोई कार्य नहीं किया गया है। प्रस्तुत शोधपत्र में इस शिफ क्षारक के प्रोटान लीगैंड स्थायित्व स्थिरांक, 35° तथा 45° से० तथा 0.1M(KNO_3) आयनिक सान्द्रता पर इर्विंग-रोसोटी विधि[15] द्वारा परिकलित किये गये हैं। साथ ही, इन्हीं परिस्थितियों में इसके ZrO^{++} आयन के साथ संकुलन अभिक्रिया का अध्ययन करते हुये संकुल के स्थायित्व-स्थिरांक भी निकाले गये हैं।

प्रयोगात्मक

प्रयोग में लाये गये सभी रसायन उच्च शुद्धता वाले ए० आर० या एस० एम० कोटि के थे। लीगैंड के निर्माण की विधि, प्रयोग में लाये गये उपकरण तथा प्रायोगिक विधियाँ हमारे पूर्व शोधपत्र[16] के अनुसार ही थे। धातु, लीगैंड तथा क्षार के मानक विलयन मानक विधियों द्वारा मानकित किये गये। सभी अध्ययनों में 1 : 1 ऐथनाल-जल का (आयतनशः) मिश्रण उपयोग में लाया गया।

लीगैंड के आयनन-साम्य के अध्ययन तथा प्रोटान-लीगैंड सम्भवन स्थिरांक के परिकलन के लिये इर्विंग-रोसोटी[15] द्वारा प्रयुक्त विधि उपयोग में लायी गयी। जेरम-केल्विन की[17] पी-एच० अनुमापन विधि उपयोग में लायी गयी। इसके लिये निम्नलिखित विलयन कार्बोनेट मुक्त 0.1M KOH विलयन द्वारा अनुमा- पित किये गये :

(अ) 5 मिली० 0.1M HNO_3

(व) मिश्रण (अ) +10 मिली० 0.01M शिफ क्षारक विलयन

(स) मिश्रण (ब) +5 मिली० 0.002M धातु विलयन ($ZrOCl_2$ विलयन)

उपर्युक्त सभी प्रकरणों में कुल आयतन 1 : 1 (आयतनशः) ऐथेनॉल जल मिश्रण से 50 मिली० रखते हुये, आयनिक सांद्रता 0.1M रखने के लिये आवश्यक मात्रा में 1.0M सांद्रता का KNO_3 विलयन मिलाया गया। 1 : 1 ऐथेनॉल जल मिश्रण में पी-एच का सुधार वान पीटर्ट एवं हास की विधि[18] द्वारा किया गया।

प्रत्येक प्रकरण में मिलाये गये क्षार प्राप्त पी-एच मानों को आलेखित करने पर प्राप्त अनु- मापन वक्रों के बीच के क्षैतिज अन्तरों के मानों से $\bar{n}A$, $\bar{n}$ तथा PL^- के मान इर्विंग-रोसोटी द्वारा दिये गये समीकरणों[15] से परिकलित किये गये। इनकी सहायता से 35° और 45° से० पर प्रोटान लीगैंड सम्भवन स्थिरांक के मान निम्नलिखित परिकलन विधियों से प्राप्त किये गये :

(1) ग्राफीय अर्ध समाकलन विधि, (2) रेखीय, आरेख विधि तथा

(3) पाइन्ट वाइस परिकलन विधि।

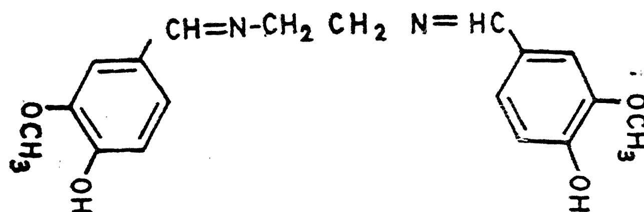
इन तीनों विधियों से प्राप्त मान लगभग समरूप पाये गये (सारणी 1, चित्र 1)।

धातु आयन (ZrO^{++}) तथा शिफ क्षारक के मध्य बनने वाले संकुलों का भारशः अनुपात नायर तथा पांडे की एक परिवर्तन विधि[19] का उपयोग करते हुये चालकतामापी अनुमापनों की सहायता से निकाला गया (चित्र 2)।

धातु लीगैंड स्थायित्व स्थिरांक के मान सीधे सम्भवन वक्र (चित्र 3) से प्राप्त किये। संशोधित मान निम्नतम वर्ग विधि द्वारा परिकलित किये गये तथा सारणी 1 में दिये गये हैं।

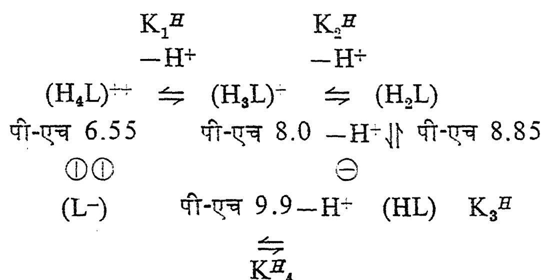
परिणाम तथा विवेचना

पी-एच अनुमापन वक्रों (चित्र 4) को देखने से स्पष्ट होता है कि 8.5 पी-एच तक लीगैंड वक्र अम्ल के वक्र से पीछे रहता है। वक्रों की स्थिति दो तुल्यांकी प्रोटॉन लीगैंड के प्रति मोल से संयुक्त होने को प्रदर्शित करती है। ये प्रोटान स्पष्टतः लीगैंड अणु में, एथिलीन डाइऐमीन अणु से प्राप्त, दो नाइट्रोजनों से संयुक्त होंगे। यथा



एथिलीन डाइ ऐमीन तथा वेनीलीन से बना शिफ क्षारक

ये दोनों प्रोटान क्रमशः 8 पी-एच तक आयनित हो जाते हैं और इसके बाद लीगैंड वक्र, से (8.5 पी-एच के बाद) आगे हो जाता है और अंततः दो तुल्यांकी प्रोटान मुक्त करने को व्यक्त करता है। ये दो प्रोटान शिफ क्षारक अणु में उपस्थित दो वेनिलीन अंशों के (दो) फीनॉली समूहों के क्रमशः आयनन से प्राप्त होते हैं। इस तरह दो प्रोटान युक्त शिफ क्षारक अणु $(H_4L)^{++}$ के आयनन के लिये K_n^H के चार मान प्राप्त होते हैं। इनमें प्रथम दो, K_1^H तथा K_2^H के, मान दो नाइट्रोजनों पर संयुक्त प्रोटानों के क्रमशः पृथक्करण से सम्बद्ध रहते हैं जबकि शेष दो, K_3^H तथा K_4^H के, मान फीनॉली समूहों के क्रमशः आयनन से सम्बद्ध हैं; यथा 35° से० पर दो प्रोटान युक्त लीगैंड के आयनन के साम्य निम्नलिखित रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं :

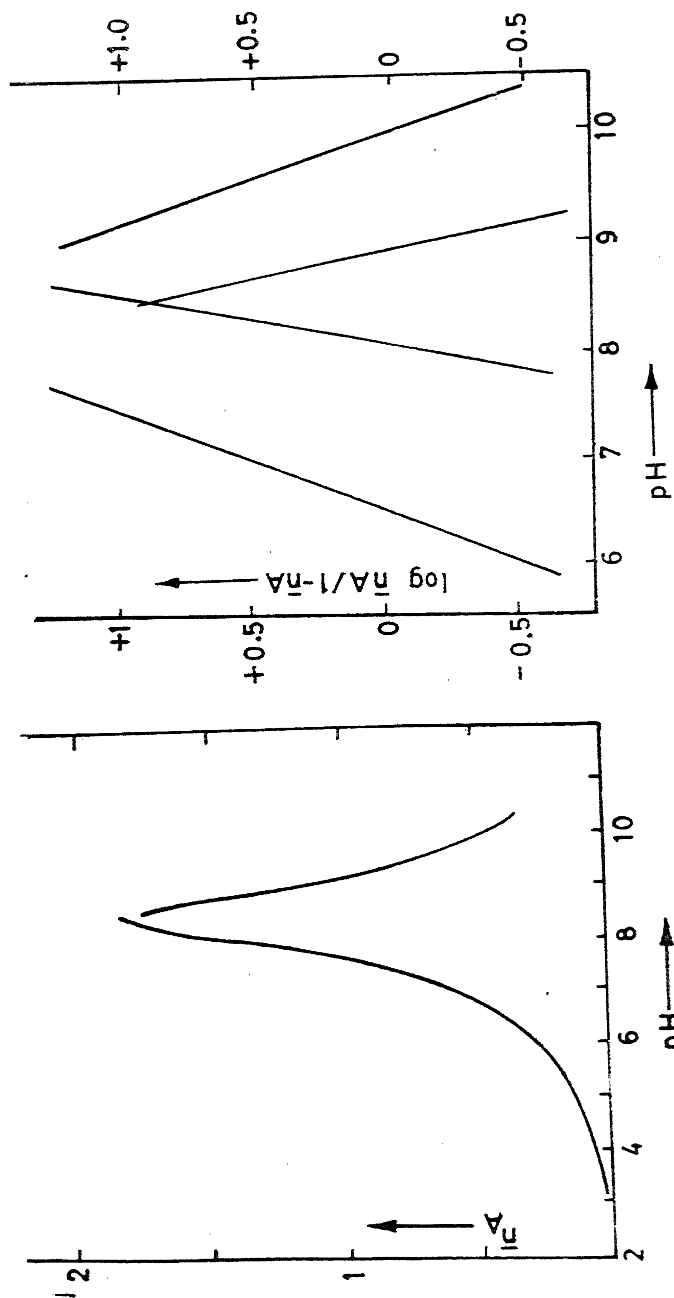


सारणी 1

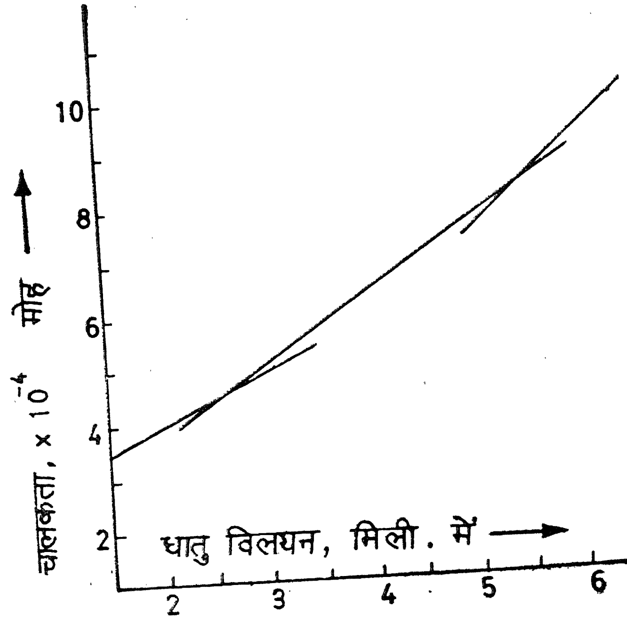
वेनीलीन एथिलीन डाइऐमीन शिफ क्षारक के 35° तथा 45° से० तथा 0.1M आयनिक सान्द्रता पर प्रोटान लीगैंड स्थायित्व स्थिरांक K^H_n तथा ZrO^{++} संकुल के सम्भवन स्थिरांक

	35°	45°	विधि
$\log K_1^H$	6.55	5.10	ए
	6.55	5.10	बी
	6.29	5.20	सी
$\log K_2^H$	8.00	7.10	ए
	8.00	7.10	बी
	8.17	7.09	सी
$\log K_3^H$	8.85	7.90	ए
	8s80	7.90	बी
	8.00	7.97	सी
$\log K_4^H$	9.90	8.95	ए
	9.90	8.95	बी
	9.00	8.98	सी
$\log K_1$ ZrO^{++} (संकुल)	3.00	3.95	डी
$\log K_2$ ZrO^{++} (संकुल)	1.36	2.82	डी

संकेत : ए—ग्राफीय अर्ध समाकलन विधि, बी—रेखीय आरेख विधि,
सी—पाइन्ट वाइस परिकलन, डी—निम्नतम वर्ग विधि ।



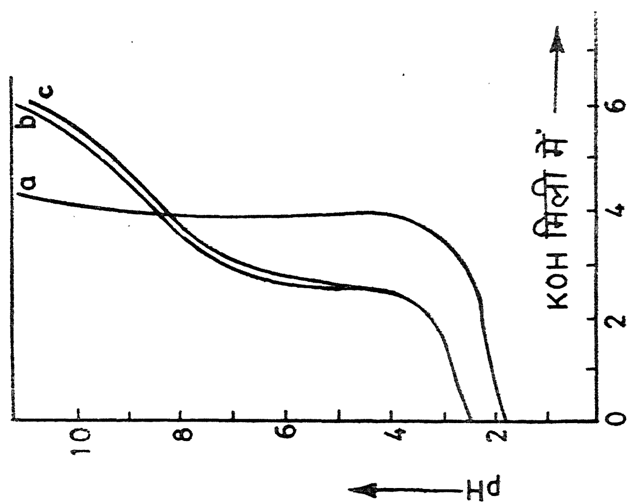
चित्र 1 : एन-वेन के प्रोटॉन लीगेंड संभवन स्थिरांक (A) अर्ध $\bar{n}A$ विधि B रेखीय आरेख विधि



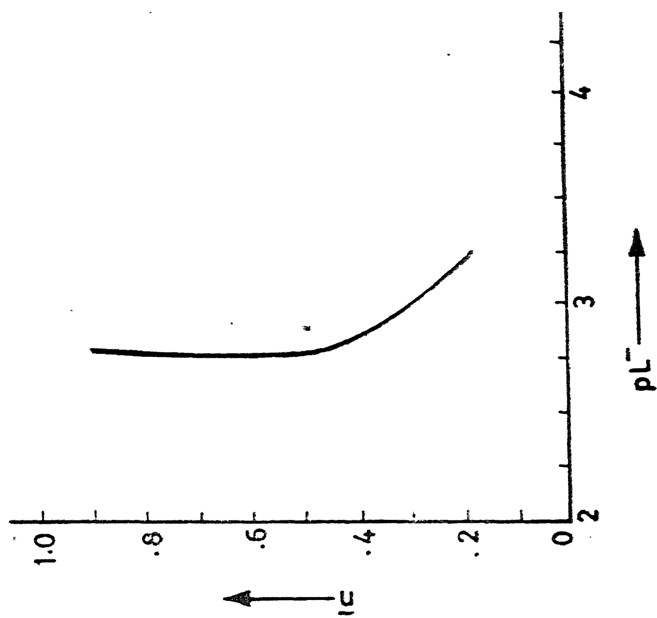
चित्र 2 : चालकतामापी वक्र

सारणी 1 को देखने से स्पष्ट है कि ताप बढ़ने के साथ लीगैंड का आयन अपेक्षाकृत जल्दी होने लगता है 45° से० पर K^{H}_{n} के मान 35° से० की तुलना में निम्न रहते हैं।

चालकतामापी अनुमापन (चित्र 2) ZrO^{++} तथा लीगैंड के मध्य दो M : L, 1 : 1 तथा 1 : 2 संकुलों का निर्माण दर्शाते हैं जबकि पी-एच अनुमापन वक्रों (चित्र 4) को देखने से पता चलता है कि धातु वक्र पी-एच 4 के बाद से ही पृथक होना प्रारम्भ कर देता है। अतः लीगैंड अणु के नाइट्रोजनों से संयुक्त प्रोटानों का आयनन धातु आयन के लीगैंड अणु से संकुलन की क्रिया द्वारा प्रभावित होता है। इस तरह स्पष्ट होता है कि ZrO^{++} दोनों नाइट्रोजनों पर संयुक्त प्रोटानों को प्रतिस्थापित करते हुये संकुल बनाता है। सारणी 1 में दिये log K_n के मान ताप बढ़ने के साथ संकुल के अधिक स्थायित्व को दर्शाते हैं।



चित्र 4 : अनुमापक वक्र (a) अम्ल वक्र (b) लीगैंड वक्र (c) धातु वक्र



चित्र 3 : Zro^{++}-एन-वेन संकुल का संभवन वक्र 35° से०

निर्देश

1. कावाकामी तथा सहयोगी, **जर्न० इन आर्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1971, **33**, 3773.
2. बिरदार, एन० एस० तथा सहयोगी, **जर्न० कर्नाटक यूनी**, 1972, 1.
3. मुरै, के० एस० तथा शीहान, आर० एम०, **केम० फिजि० लैटर्स**, 1973, **22**(**2**), 406.
4. बोन्चर, एल० जे० तथा फरैल, एम० ओ०, **जर्न० इनोर्ग० न्यू० केमि०**, 1973, **35**, 373.
5. पोद्धार, एस० एन० तथा दास, एन० एस०, **इन्डियन, जर्न० केमि०**, 1974, **12**(**10**), 1105.
6. यूरीको ऐवे तथा सहयोगी, **बुलै० केम० सोसा० जापान**, 1974, **47**, 2655.
7. यामादा तथा सहयोगी, **इनोर्ग० केम० ऐक्टा**, 1968, **2**(**4**), 425; 1975, **12**(1), 9.
8. डे, के० तथा डे, आर० एल०, **जर्न० इनोग० न्यू० केमि०**, 1975, **37**(**3**), 843.
9. बिरदार, एन० एस० लोकर, ए० एल० तथा कुलकर्णी, वी० एस०, **करेंट साइंस**, 1975, **44**(**6**), 180.
10. सास्जार तथा सहयोगी, **ऐक्टा केमि० ऐके० साइंस**, हंग्री, 1975, **87**(**4**), 331; 1975, **86**(**2**), 89.
11. मैक क्वाटी तथा सहयोगी, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1975, **97**, 5117.
12. रिजवी, एम० एफ० एच० तथा अहमद, नसीर, **जर्न० इन्डियन केम० सोसा०**, 1976, **53**, 854.
13. अरोरा, ओ० पी० तथा सहयोगी, **जर्न० इन्डियन केम० सोसा०**, 1980, **57**, 273.
14. विरदार, एन० एस० तथा सहयोगी, **इन्डियन जर्न० केमि०**, 1971, **9**, 712.
15. इर्विंग, एच० एम० तथा रोसोटी, एच० एस०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1954, 2904.
16. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा मैंनी, ए० के०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, (प्रेषित)
17. केल्विन, एच० तथा विल्सन, के० डब्लू०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1945, **67**, 2003.
18. वान यीटर्ट, एल० जी० तथा हास, सी०, **वही**, 1953, **75**, 3651.
19. नायर, एम० तथा पांडे, सी० एम०, **प्रोसी० इन्डियन ऐके० साइंस**, 1942, **27**ए, 204.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol; 29, No. 4, 1986

द्विअंगी संकरों के स्थिरता स्थिरांक, अर्द्ध-तरंग विभव तथा उच्चतम अवशोषण बैण्ड

महेन्द्र सिंह वर्मा
रसायन अध्ययन शाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अक्टूबर 19, 1985]

सारांश

Cu (II) NTP (NTP=ATP, ITP, GTP या UTP) के 1:1 संकरों के स्थिरता स्थिरांक अर्द्ध-तरंग विभव तथा उच्चतम अवशोषण का तुलनात्मक अध्ययन किया गया है। Cu(II)–UTP संकर के असामान्य आचरण की व्याख्या की गई है। इन तुलनाओं के लिए आवश्यक घटकों की भूमिका पर प्रकाश डाला गया है । यह निष्कर्ष निकाला गया है कि स्थिरता स्थिरांक की तुलना में अर्द्ध-तरंग विभव तथा उच्चतम अवशोषण अधिक गम्भीर जानकारी दे सकते हैं ।

Abstract

Stability constants half-wave potential and maximum absorption of binary complexes. *By* Mahendra Singh Verma, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain.

A comparative study of stability constants, half-wave potentials and maximum absorption of 1 : 1 complenes of Cu (II) NTP (NTP=ATP, ITP, GTP or UTP) has been made. The abnormal behaviour, of Cu (II)–UTP has been explained. Light has been thrown on the role of the factors which are nécessary for such type of comparisons. A conclusion has been drawn that half-wave potential and maximum absorption give deeper probe in comparison to stability constants.

यदि कोई साधारण धातु आयन (अर्थात् जलीय संकर), M^{n+} बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड पर अपचयित होकर पारद के साथ अमलगम बनाता है तो इस अभिक्रिया को समीकरण (1) से प्रदर्शित किया जाता है[1]



$$M^{n+} + ne + x\ H_g \rightarrow M(H_g)_x \qquad (1)$$

इस अभिक्रिया के इलेक्ट्रोड विभव, $E_{d,e}$ को नर्न्स्ट समीकरण (2) से प्रदर्शित किया जा सकता है

$$E_{d,e}=(E_{1/2})_s-\frac{2.303RT}{nF}\log\frac{[M(Hg)_x]}{[M^{n+}]} \qquad (2)$$

जहाँ पर $(E_{1/2})_s$ साधारण धातु आयन का अर्द्ध-तरंग विभव है।

जब किसी धातु आयन के विलयन में कोई संकरणकारी कर्मक L डाला जाता है तो संकर $[ML_y]^{n+}$ बनता है अर्थात्

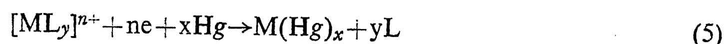


$$M^{n+}+yL\rightleftharpoons[ML_y]^{n+} \qquad (3)$$

साम्यावस्था (3) में विरचित संकर $[ML_y]^{n+}$ का साम्य स्थिरांक K^{M}_{MLy} निम्नलिखित समीकरण द्वारा दिखाया जा सकता है—

$$K^{M}_{MLy}=\frac{[ML_y]^{n+}}{[M^{+n}][L]^y} \qquad (4)$$

यदि यह संकर $[ML_y]^{n+}$ विन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड पर अपचयित होता है



$$[ML_y]^{n+}+ne+xHg\rightarrow M(Hg)_x+yL \qquad (5)$$

तो समीकरण (5) के इलेक्ट्रोड विभव को नर्न्स्ट समीकरण (6) से व्यक्त किया जा सकता है

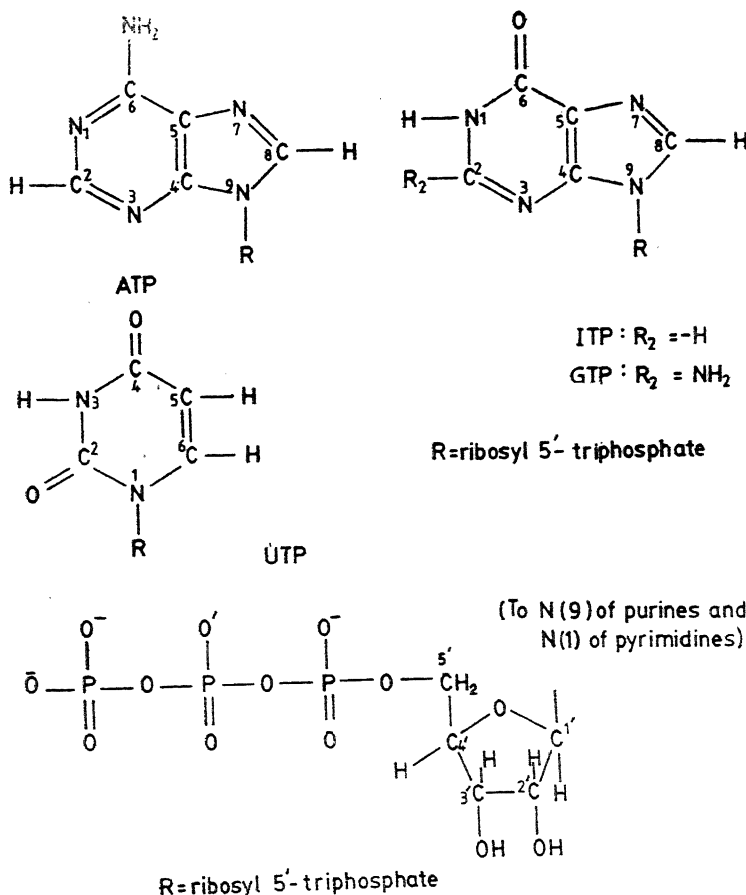
$$(E_{1/2})_c=(E_{1/2})_s-\frac{2.303RT}{nF}\log K^{M}_{MLy} \qquad (6)$$

जहाँ पर $(E_{1/2})_c$ संकर का अर्द्ध-तरंग विभव है। समीकरण (6) एक सरल रेखा का समीकरण है जिसे सामान्यतः $y=mx+c$ से प्रदर्शित किया जा सकता है।

समीकरण (6) से स्पष्ट है कि यदि विभिन्न लिगैंडों के संकर एक ही धातु आयन के साथ बनाये जायँ और उन संकरों के अर्द्ध-तरंग विभव को उनके स्थिरता स्थिरांकों के प्रति आलेखित किया जाय तो $(E_{1/2})_c$ अक्ष का अन्तःखण्ड उस धातु आयन के अर्द्ध-तरंग विभव $(E_{1/2})_s$ के बराबर होगा। इसमें यह मान लिया गया है कि इन सभी संकरों का अपचयन समीकरण (6) का पूर्णतः पालन करता है। वस्तुतः, समीकरण (6) के पालन के लिये यह आवश्यक है कि संकर का अर्द्ध-तरंग विभव धातु आयन के अर्द्ध-तरंग विभव से अधिक हो अर्थात् अधिक ऋणात्मक हो।

समीकरण (6) की सत्यता को परखने के लिये Cu (II) के चार द्विअंगी संकर —[Cu (II ATP]$^{2-}$[Cu (II) ITP]$^{2-}$, [Cu (II) GTP]$^{2-}$ तथा [Cu (II) UTP]^{2} चुने गये। यहाँ पर ATP,

ITP, GTP, तथा UTP क्रमशः ऐडीनोसीन, आइनोसीन, ग्वानोसीन तथा यूरीडीन न्यूक्लिओसाइडों के S^1-ट्राइफास्फेट हैं, जिन्हें सामान्यतः न्यूक्लिओटाइड कहते हैं। चुने गये लिगैंडों के संरचना सूत्र निम्नवत् हैं।



R=ribosyl 5'-triphosphate

स्पष्ट है कि न्यूक्लिओटाइडों के तीन अवयव होते हैं—(अ) बेस, (ब) राइबोस तथा (स) फॉस्फेट समूह। इन तीनों अवयवों में से प्रत्येक में कई सशक्त दाता परमाणु प्रतीत होते हैं, लेकिन पूर्व अध्ययनों[2–9] से पता चलता है कि प्यूरीन बेसों में N(7) तथा पिरिमिडीन बेसों में N(3) के अतिरिक्त फॉस्फेट समूहों के O-परमाणु भी सशक्त दाता होते हैं। राइबोस समूह[3] के सभी O-परमाणु निर्बल दाता के रूप में जाने जाते हैं।

Cu (II) धातु आयन तथा इन्हीं न्यूक्लिओटाइडों को लिगैंड के रूप में चुनने का कारण यह है कि ये जैविक निकायों में पाये जाते हैं। लगभग सभी एन्जाइम इन फॉस्फेटों को क्रियाधार के रूप में

चाहते हैं और साथ ही एक द्विसंयोजी धातु आयन को भी । इसलिये इन फॉस्फेटों के संकरों के अध्ययन पर काफी ध्यान दिया गया है[2,7,8,10–13] ।

वास्तव में, इन संकरों का एन्जाइम-धातु आयन-क्रियाधार के संकरों के मॉडल के रूप में प्रयुक्त किया जा सकता है ।

1. स्थिरता। स्थिरांक

संकरों के स्थिरिता स्थिरांक निर्धारित करने के पूर्व प्रयुक्त लिगैंड के अम्लता स्थिरांक ज्ञात करना भी आवश्यक है । वस्तुतः अम्लता स्थिरांकों के मानों से यह पता चल जाता है कि किसी विशिष्ट पी-एच पर विलयन में किन बन्धों की सम्भावना अधिक है और किन की कम । उदाहरणार्थ, यदि NTP किसी न्यूक्लिओसाइड के 5′-ट्राइफॉस्फेट को पूर्णतः अप्रोटॉनी रूप में प्रदर्शित करता है तो H_5NTP पाँच प्रोटॉनों की उपस्थिति को प्रदर्शित करेगा । इन पाँचों प्रोटॉनों के वियोजित होने को तथा इनके क्रमशः अम्लतः स्थिरांकों को समीकरण (7) से (11) तक दिखाया गया है



$$H_5NTP \rightleftharpoons H_4NTP + H^+ \qquad (7)$$

$$pK^H_{H_5NTP} = \frac{[H_4NTP]\,[H^+]}{[H_5NTP]}$$



$$H_4NTP \rightleftharpoons H_3NTP + H^+ \qquad (8)$$

$$pK^H_{H_4NTP} = \frac{[H_3NTP]\,[H^+]}{[H_4NTP]}$$



$$H_3NTP \rightleftharpoons H_2NTP + H^+ \qquad (9)$$

$$pK^H_{H_3NTP} = \frac{[H_2NTP]\,[H^+]}{[H_3NTP]}$$



$$H_2NTP \rightleftharpoons HNTP + H^+ \qquad (10)$$

$$pK^H_{H_2NTP} = \frac{[HNTP]\,[H^+]}{[H_2NTP]}$$



$$HNTP \rightleftharpoons NTP + H^+ \qquad (11)$$

$$pK^H_{HNTP} = \frac{[NTP]\,[H^+]}{[HNTP]}$$

साहित्य से ज्ञात होता है कि[9] कि $pK^H_{H_5NTP}$, $pK^H_{H_4NTP}$ तथा $pK^H_{H_3NTP}$ के मान सभी

5′-ट्राइफॉस्फेटों के लिये समान है तर्थात्~2.2 हैं। परन्तु $pK^{H}_{H_2NTP}$ तथा pK^{H}_{HNTP} बेस के साथ परिवर्तित होते हैं (सारणी 1)

pK^{H}_{HTUP} के मान देखने (सारणी 1) से ज्ञात होता है कि यदि विलयन का पी-पच 6.5 रखा जाय तो H_5NTP के सारे प्रोटॉन वियोजित हो जाते हैं। वास्तव में $pK^{H}_{H_5NTP}$ प्यूरीन बेसों के N(7) तथा पिरिमिडीन बेसों के N(3) से प्रोटॉनों के वियोजन को प्रदर्शित करता है। चूँकि UTP में N(3) पर पहले से ही एक प्रोटॉन मौजूद हैं इसलिये दूसरे के आकर जुड़ने के बहुत कम अवसर हैं अतः $pK^{H}_{H_2UTP}$ का मान नहीं होता है (देखिये सारणी 1)।

Cu (II) : NTP, 1 : 1 के लिये विरचना स्थिरांकों K^{Cu}_{CuNTP} के मानों (समीकरण 12) के लघुगणक सारणी 1 में दिये गये हैं।



$$Cu\,(II) + NTP \rightleftharpoons Cu\,(II)\,NTP \qquad (12)$$

$$K^{Cu}_{CuNPT} = \frac{[Cu(II)NTP]}{[Cu(II)]\,[NTP]}$$

सारणी 1 के परिशीलन से ज्ञात होता है कि प्यूरीन बेसों के न्यूक्लिओटाइडों के साथ विरचित Cu (II) के संकरों के स्थिरता स्थिरांक लगभग बराबर हैं जबकि पिरिमिडीन बेस यूरेसिल के न्यूक्लिओटाइड UTP के संकर का स्थिरता स्थिरांक उल्लेखनीय रूप से कम है। यह सम्भवता इसलिये कि यूरेसिल के N(3) पर प्रोटॉन होता है, जो Cu (II) के साथ N(3) की कोई अन्तःक्रिया नहीं होने देता हैं। प्यूरीन बेसों में यह अन्तःक्रिया होती है[3]।

2. अर्द्ध-तरंग विभव

अब यह सुनिश्चित हो चुका है कि इलेक्ट्रोड आचरण संकरों का एक विशेष गुणधर्म है। इस क्षेत्र में बैल्चैक[14] का शोधकार्य उल्लेखनीय है। उसने संकरों के अर्द्ध-तरंग विभव, $(E_{1/2})_c$ की तुलना उनकी संरचना से की है[15]। उसका निष्कर्ष है कि अर्द्ध-तरंग विभव किसी भी संकर की संरचना का फलन होता है।

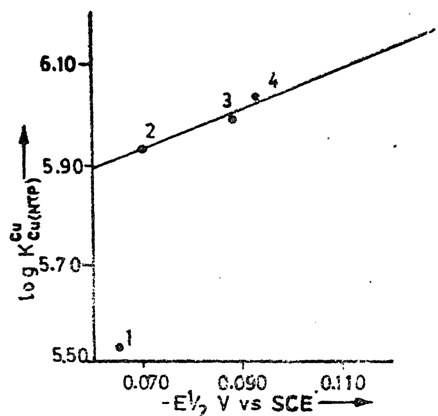
वास्तव में संरचनात्मक घटकों की तुलना अर्द्ध-तरंग विभव से करते समय यह आवश्यक होता है कि जिन यौगिकों के अर्द्ध-तरंग विभव की तुलना की जाती हैं, उनके अर्द्ध-तरंग विभव समान गैर संरचनात्मक घटकों की उपस्थिति में निर्धारित किये जायँ। विलयन का पी-एच, ताप, आधार विद्युत-अपघट्य की मान्द्रता, उच्चिष्ठ निरोधी की सान्द्रता आदि को गैर संरचनात्मक घटक माना जाता है।

गैर संरचनात्मक घटकों को एकसमान रखकर तथा यह ध्यान रखकर कि लिये गये सारे न्यूक्लिओटाइड पी-एच 6.5 पर वियोजनीय प्रोटॉनों से पूर्णतः मुक्त हो जाते हैं, कोठारी ने[7] Cu^{2+} के ATP, ITP, GTP तथा UTP के साथ 1 : 1 संकरों का अर्द्ध-तरंग विभव निर्धारित किया (देखिये सारणी 1)। यहाँ यह उल्लेख करना आवश्यक है कि पी-एच 6.5 पर ये द्विअंगी संकर लगभग 80-90% बनाते हैं।[9] साथ ही यह उल्लेख करना भी असंगत न होगा कि Cu^{2+} की सान्द्रता $1\times10^{-3}M$ रखी गई है क्योंकि इससे अधिक सान्द्रता होने पर ये संकर द्वितयी होने लगते हैं[5]। सम्भवतः यही कारण है कि तकी खान[16] ने Cu^{2+} के ATP, ADP तथा AMP के साथ बने संकरों को द्वितयी बताया है जबकि लेखक के स्वयं के अन्वेषण[8] में उनको एकतयी पाया गया है।

3. स्थिरता स्थिरांक बनाम अर्द्ध-तरंग विभव

किसी धातु आयन का अर्द्ध-तरंग विभव, विलयन में लिगैंड मिलाने पर सामान्यतः ऋणात्मक दिशा में विस्थापित होता है जिसका अर्थ है कि लिगैंड की उपस्थिति में धातु का विद्युत-अपचयन कठिनतर हो जाता है अर्थात् लिगैंड की उपस्थिति में धातु आयन की संक्रान्ति अवस्था अधिक ऊर्जा तल पर चली जाती है। इसीलिये इलेक्ट्रोड को फ्रैंक-कोण्डन[17] के सिद्धान्त के अनुसार इलेक्ट्रान स्थानान्तरित करने के लिये अधिक विभवान्तर पर लाना पड़ता है। इसी प्रकार यह भी देखने में आया है[18] कि अधिक प्रबल लिगैंड के संकर का स्थिरता स्थिरांक अधिक होता है।

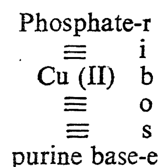
इन दोनों बातों को ध्यान में रखकर स्थिरता स्थिरांकों और अर्द्ध-तरंग विभवों का आलेख चित्र 1 में दिखाया गया है। यह आलेख संकेत देता है कि प्यूरिन बेसों के स्थिरता स्थिरांक अधिक हैं



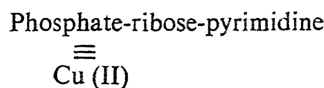
चित्र 1

अपेक्षाकृत पिरिमिडीन बेसों के न्यूक्लिओटाइडों के संकरों के स्थिरता स्थिरांकों के। इस चित्र से यह भी स्पष्ट होता है कि UTP का संकर एक असामान्य आचरण दिखलाता है। इसका कारण सम्भवतः यह है कि प्यूरीन बेसों के N(7) परमाणु दाता का कार्य करते हैं और एक बद्ध संरचना[19] बनाते

हैं तथा पिरिमिडीन बेसों के न्यूक्लिओटाइड मुक्त संरचना बनाते हैं। दुर्भाग्य से CTP (Cytidine 5′-triphosphate) और TTP (Thymidione 5′-triphosphate) के संकरों के अर्द्ध-तरंग विभव उपलब्ध नहीं हो सके हैं, अन्यथा अधिक सटीक तुलना हो सकती थी।



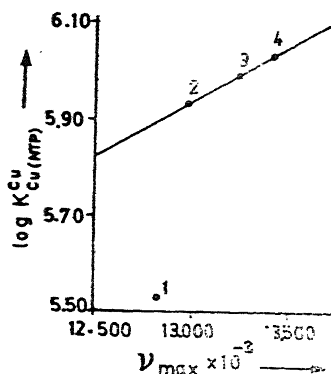
बद्ध संरचना



मुक्त संरचना

4. स्थिरता स्थिरांक बनाम उच्चतम अवशोषण बैण्ड

स्पेक्ट्रोस्कोपी को संकरों के त्रिविम विन्यास और संरचना निर्धारण की एक सशक्त तकनीक माना जाता है। इसीलिये यह आवश्यक समझा गया कि इन द्विअंगी संकरों के उच्चतम अवशोषण



चित्र 2

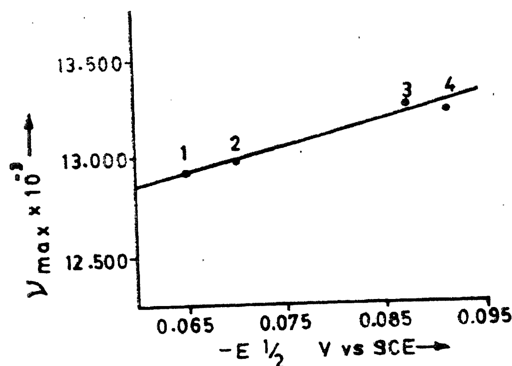
बैंड, ν_{man} की तुलना स्थिरता स्थिरांकों के लघुगणकों से की जाय। log K^{Cu}_{CuNTP} बनाम ν_{man} का आलेख चित्र 2 में प्रदर्शित किया गया है। इस आलेख से भी संकेत मिलता है कि Cu(II)UTP का आचरण असामान्य है। कारण सम्भवत: वही हो कि प्यूरीनों का N(7) अन्त:क्रिया करता है जबकि पिरिमिडीनों का N(3) नहीं।

5. अर्द्ध-तरंग विभव बनाम उच्चतम अवशोषण बैण्ड

संकरों की संरचना तथा उनके त्रिविम विन्यास का सम्बन्ध अर्द्ध-तरंग विभव से जानने की दृष्टि से, अर्द्ध-तरंग विभव बनाम उच्चतम अवशोषण बैन्ड के बीच एक आलेख खींचा गया है जो

चित्र 3 में प्रदर्शित है। इस आलेख को देखने से पता चलता है कि यहाँ पर UTP संकर एकदम सामान्य आचरण करता है।

चित्र 1, 2 तथा 3 का साथ-साथ अध्ययन करने से ऐसा लगता है कि Cu(II) और N(7) की अन्त:क्रिया का प्रभाव सिर्फ संकरों की स्थिरता पर पड़ता है, उनके इलेक्ट्रानी विन्यास पर नहीं।



चित्र 3

दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि स्थिरता स्थिरांक त्रिविम घटकों से नियंत्रित होते हैं जबकि अर्द्ध-तरंग विभव और उच्चतम अवशोषण बैंड इलेक्ट्रानी संरचना के फलन हैं। बाद वाले दोनों पर त्रिविमी घटकों का भी कुछ प्रभाव पड़ता है।

सारणी 1

न्यूक्लिओसाइड 5′-ट्राइफॉस्फेटों के अम्लता स्थिरांक, Cu(II) NTP के स्थिरता स्थिरांक, अर्द्ध-तरंग विभव तथा उच्चतम अवशोषण

($I=0.1M\ NaClO_4$, 25°)

प्राचल	ATP	ITP	GTP	UTP
$pK^{H*}_{H_2NTP}$	4.06	2.10	2.80	—
pK^{H*}_{HNTP}	6.42	2.45	6.45	6.45
$\log K^{Cu}_{CuNTP}$	6.03⁺	5.99*	5.93*	5.53*
$(E_{1/2})_c$†	−0.093	−0.088	−0.070	−0.065
v_{max}† (cm^{-1})	13,420	13,250	12,980	12,820

*Ref. 9, ⁺Ref. 20.

†Ref. 7. $(E_{1/2})_c$ $I=0.2M\ NaClO_4$ तथा ताप 20°C पर निधारित किये गये हैं। दिये गये सभी मान SCE (Saturated Calomel Elictrode) के प्रति मापे गये हैं। Tritin X−100 की 0.001% मात्रा उपस्थित थी।

†Ref. 7.

निर्देश

1. माइट्स, एल०, Polarographic Techniques, (इंटर साइंस, न्यूयार्क), 1965 पृष्ठ **204**.
2. टू, ए०टी० तथा हैलर, एम० जे०, Met. Ions Bio. Syst., (Marcel Dekker, New York), 1974, **1**, 1.
3. मार्टिन, आर० बी० तथा मरियम, वाई० एच०, **वही**, 1979, **8**, 57.
4. चौधरी, पी० तथा सीगल, एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1977, **99**, 3142
5. मिचेल, पी० आर० तथा सीगल, एच०, **वही**, 1978, **100**, 1564.
6. शेलर, के० एच० तथा सीगल, एच०, **वही**, 1983, **105**, 3005.
7. कोठारी, एन०, **पी-एच डी० थीसिस**, विक्रम विश्वविद्यालय उज्जैन, 1985.
8. कोठारी, निशा तथा वर्मा, एम० एस०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1982, **25**, 389.
9. सीगल, एच०, J. Inorg. Nucl. Chem., 1977, **39**, 1903.
10. फिलिप्स, आर० एस० जे०, **केमि० रिव्यू**, 1966, **66**: 501.
11. इजत्त, आर० एम०, क्रिस्टनसेन, जे० जे० तथा राइटिंग, जे० एच०, **केमि० रिव्यू** 1971, **71**, 439.
12. आईकोर्न, जी० एल०, Inorganic Biochemistry, (ed) जी० एल० आइकोर्न, (Elsevier, Amsterdam), 1973.
13. फ्रे, सी० एम० तथा स्टूअर, जे० ई०, निर्देश 2, पृष्ठ 51.
14. बैल्चैक, ए० ए०, Prog. Inorg Chem.,(ed) F. A. Cotton, (इंटर साइंस, न्यूयार्क), 1963, 5, 211.
15. वही, **इलैक्ट्रोकिम० एक्टा**, 1968, **13**, 1063.
16. तकीखान, एम० एम० तथा मारटैल, ए० ई०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1962, **84**, 3037.
17. डैगो, आर० एस०, Physical Methods in Inorg. Chem., (East-West Press, New Delhi), 1978, पृष्ठ 137.

18. सिलैन, एल० जी० तथा मारटैल, ए० ई०, Stability Constants of Metal Ion Complexes, (Chemical Society, London), 1971.

19. शेलर, के० एच० तथा सीगल, एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1983, **105**, 5891.

20. सीगल, एच०, बँकर, के० तथा मैक कोरमिक, डी० बी०, Biochim Biophys., 1967, **148**, 655.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

पत्र वैद्युतकण संचलन द्वारा Cu (II), UO_2 (II), Co (II) तथा Zn (II) के सेरिनेट संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक

सत्येन्द्र सिंह, दीपा गुप्ता, प्रदीप कुमार तथा के० एल० यादव
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्रप्त—अगस्त 9, 1984]

सारांश

Cu(II), UO_2 (II), Co (II) तथा Zn (II) के सेरिनेट संकुलों के स्थायित्व स्थिरांकों के मान पत्र वैद्युतकण संचलन विधि से ज्ञात किये गये हैं।

Abstract

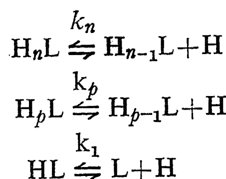
Stability constants of serinate complexes of Copper (II), Uranyl (II), Cobalt(II) and Zinc (II) by paper electrophoresis. *By* Satyendra Singh, Deepa Gupta, Pradeep Kumar and K. L. Yadava, Department of Chemistry, University of Allahabad.

Stability constants of copper (II), uranyl (II), cobalt (II) and zinc (II) have been determined by paper electrophoresis. Serine (0.01 mol dm^{-3}) was added to the background electrolyte : 0.01 mol dm^{-3} $HClO_4$. The proportions of $CH_2(OH)CH(NH_3^+)-COOH$, $CH_2(OH)-CH(NH_3^+)-COO^-$ and $CH_2(OH)-CH(NH_2)-COO^-$ where varied by changing the pH of the background electrolyte. These metal ions yield both 1 : 1 and 1 : 2 complexes with respect to metal ion and serinate anion.

संकुलन प्रक्रमों की विशिष्टताओं की व्याख्या के लिये अनेक प्रकार की प्रविधियों का प्रयोग होता है। जोक्ल[1] ने पत्र वैद्युतकण संचलन विधि का प्रयोग किया। वियर्नेट[2] ने भी इसी प्रकार का परि-गणन किया है। हाल ही में हमारी प्रयोगशाला से नितान्त परिवर्धित विधियाँ[3–7] प्रकाशित हुई हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में सर्वथा नवीन विधि का उपयोग Cu(II), UO_2 (II), Co (II) तथा Zn (II) के सेरिनेट संकुलों की प्रकृति ज्ञात करने तथा उनके स्थायित्व स्थिरांकों को ज्ञात करने के लिये किया गया है।

सैद्धान्तिक

माना कि लिगैंड बहुभास्मिक अम्ल है । आयनों पर के आवेशों की उपेक्षा करने पर यह माना जा सकता है कि यह निम्नलिखित पदों में वियोजित होता है—



$$H_nL \overset{k_n}{\rightleftharpoons} H_{n-1}L+H$$
$$H_pL \overset{k_p}{\rightleftharpoons} H_{p-1}L+H$$
$$HL \overset{k_1}{\rightleftharpoons} L+H$$

किसी प्रोटानीकृत स्पीसीज H_pL की सान्द्रता को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :—

$$[H_pL]=k_p[H_{p-1}L][H]=k_pk_{p-1}\ldots k_1[L]\,.\,[H]^p$$
$$=\alpha_p[H]^p\,.\,[L] \qquad (1)$$

जहाँ

$$\alpha_p=k_1\,.\,k_2\,\ldots\,k_p$$

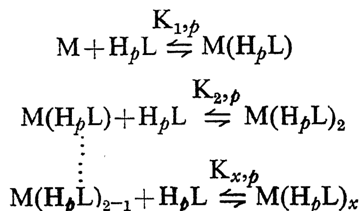
इस तरह बहुभास्मिक अम्ल विभिन्न ऋणायनी स्पीसीज़ों के रूप में स्वयं को वितरित कर देता है । समग्र सान्द्रता के लिये निम्नलिखित व्यंजक लागू होता है—

$$[T_A]=\sum_{p=0}\alpha_p\,[H]^p\,.\,[L]$$

इस दृष्टि से समीकरण (1) निम्न रूप धारण करता है—

$$[H_pL]=\frac{[T_A]\,.\,\alpha_p.[H]^p}{\sum\limits_{p=0}\alpha_p\,.\,[H]^p} \qquad (1)$$

धातु आयन M किसी अम्ल की प्रोटोनित प्रजाति से संकुल बना सकता है और इस अभिक्रिया को सामान्यतः निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है—



$$M+H_pL \overset{K_{1,p}}{\rightleftharpoons} M(H_pL)$$
$$M(H_pL)+H_pL \overset{K_{2,p}}{\rightleftharpoons} M(H_pL)_2$$
$$\vdots$$
$$M(H_pL)_{2-1}+H_pL \overset{K_{x,p}}{\rightleftharpoons} M(H_pL)_x$$

सामान्य संकुल स्पीसीज़ को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है—

$$[M(H_pL)]_x=K_{x,p}[M(H_pL)_{x-1}][H_pL]$$
$$=K_{x,p}\,.\,K_{x-1,p}\ldots K_{1,p}[H_pL][M]$$
$$=\beta_{x,p}[H_pL]^x\,.\,[M] \qquad (2)$$

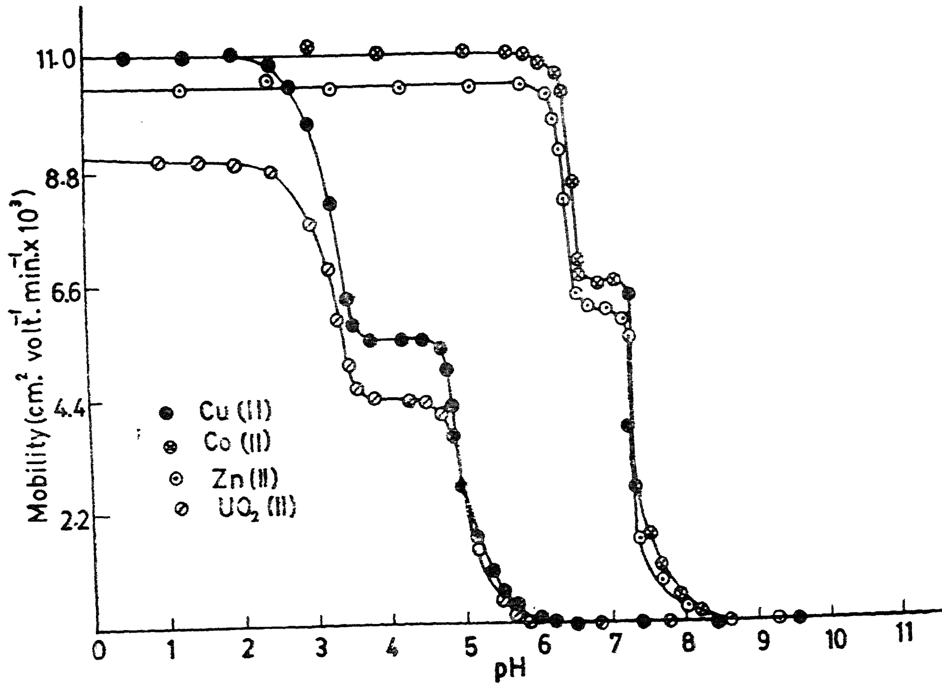
जहाँ $\beta_{x,p}$ संकुल का समग्र स्थायित्व स्थिरांक है और इसे निम्नलिखित व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है—

$$\beta_{x,p}=K_{1,p} \cdot K_{2,p} \ldots K_{x,p}$$

बहुभास्मिक अम्ल की किसी विशिष्ट ऋणायनी प्रजाति की सापेक्ष बहुलता आधार-वैद्युत अपघटन के पी-एच पर निर्भर करती है। पर्ण-पट्टी पर धातु आयन धब्बा इन ऋणायनी प्रजातियों के साथ अनेक प्रकार के संकुलों का निर्माण कर सकता है। यह धातु धब्बा एक इकाई के रूप में गति करेगा जिसकी गति को इकाई विभव प्रवणता के अन्तर्गत जोक्ल के बहु-प्रसिद्ध समीकरण

$$U=\Sigma\ u_{x,p} \cdot f_{x,p} \tag{3}$$

द्वारा दिया जा सकता है[1]। जहाँ $u_{x,p}$ गति और $f_{x,p}$ मोल अंश है सामान्य संकुल $M(H_pL)_x$ का जो संघट्ट में उपस्थित है।



चित्र 1 : [M (II) सेरीन] तन्त्र का गतिशीलता वक्र [ताप 35°, आयनिक सान्द्रता 0.1]

स्पष्ट है कि

$$f_{x,p}=\frac{[(MH_pL)_x]}{\Sigma[M(H_pL)_x]}$$

यह व्यंजक समीकरण (2) के परिप्रेक्ष्य में निम्निलिखित में सरलीकृत हो जाता है—

$$f_{x,p}=\frac{\beta_{x,p}[H_pL]^x}{\Sigma\beta_{x,p}[H_pL]^x}$$

अब समीकरण (3) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है—

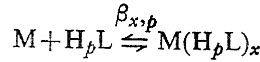
$$U=\frac{u_{x,p}\beta_{x,p}[H_pL]^x}{\Sigma\beta_{x,p}[H_pL]^x} \tag{4}$$

यदि अप्रोटोनित तथा आंशिक प्रोटोनित प्रजातियों पर विचार किया जाय तो समीकरण (4) को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है—

$$U=\frac{\begin{array}{c} u_{0,0}\cdot\beta_{0,0}+u_{1,0}\cdot\beta_{1,0}[L]+u_{2,0}\cdot\beta_{2,0}[L]^2+\ldots\ldots\ldots \\ +u_{1,1}\cdot\beta_{1,1}[HL]+u_{2,1}\cdot\beta_{2,1}[HL]^2+\ldots\ldots\ldots \\ +u_{2,1}\cdot\beta_{2,1}[H_2L]+u_{2,2}\beta_{2,2}[H_2L]^2+\ldots\ldots\ldots \end{array}}{\begin{array}{c} \beta_{0,0}+\beta_{1,0}[L]+\beta_{2,0}[L]^2+\beta_{1,1}[HL]\beta_{2,1}[HL]^2+ \\ \beta_{1,2}[H_2L]+\beta_{2,2}[H_2L]^2+\ldots\ldots\ldots \end{array}} \tag{5}$$

विभिन्न संकुलों के स्थायित्व स्थिरांकों को समीकरण (4) की सहायता से परिगणित किया जा सकता है।

लिगैंड बनाने वाले अम्ल के H_pL ऋणायन को धातु आयन के साथ



$$M+H_pL \overset{\beta_{x,p}}{\rightleftharpoons} M(H_pL)_x$$

संकुल बनाते मानने पर समीकरण (4) का सरलीकृत रूप इस प्रकार होगा—

$$U=\frac{u_{0,0}+u_{x,p}\cdot\beta_{x,p}[H_pL]^x}{1+\beta_{x,p}[H_pL]^x}$$

प्रयोगात्मक

उपकरण

सिस्ट्रानिक्स माडेल 604 (भारत) नामक वैद्युतकणसंचरण उपकरण का प्रयोग किया गया। इसमें PVC मोल्डित दोहरा संतरण पात्र होता है। इसका विशेष विवरण एक पूर्ववर्ती लेख में दिया जा चुका है।[16]

सारणी 1

धातु-सेरिनैट संकुलों का आव्रजन

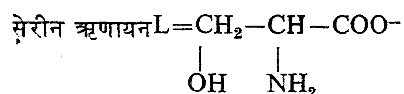
	आयनों की गतिशीलता U (cm^2, $volt^{-1}$, min^{-1}, 10^3)			
pH	Cu (II)	UO_2 (II)	Co (II)	Zn (II)
1	2	3	4	5
1.00	11.00	9.02	11.00	10.34
1.10	11.00	9.02	11.00	10.34
1.25	11.00	9.02	11.00	10.34
1.40	11.00	9.02	11.00	10.34
1.65	10.56	9.02	11.00	10.34
1.80	11.00	9.02	11.22	10.34
2.05	11.44	9.24	11.00	9.90
2.25	11.00	9.02	11.00	10.34
2.30	11.00	9.02	11.00	10.34
2.40	11.00	8.36	11.00	9.90
2.55	11.00	9.02	11.44	10.34
3.15	9.68	7.48	11.00	10.34
3.20	9.24	7.48	11.22	10.34
3.35	8.14	6.60	11.22	10.34
3.40	6.82	5.28	11.00	10.34
3.45	6.82	5.05	11.00	10.12
3.65	6·30	4.40	11.00	10.34
3.80	5.50	4.40	11.00	10.34
4.05	5.50	4.40	11.00	10.34
4.15	5.50	4.40	11.00	10.34
4.20	5.50	4.62	11.00	10.34
4.30	5.72	4.40	11.00	10.34

1	2	3	4	5
4.40	5.94	4.84	11.00	10.34
4.65	5.72	4.84	11.00	10.56
4.85	5.72	4.84	11.00	10.56
4.95	5.72	4.84	11.00	10.34
5.05	2.64	2.64	11.00	10.56
5.10	1.98	1.54	11.00	10.34
5.20	1.10	1.10	11.00	10.34
5.35	0.88	1.00	11.00	10.34
5.45	0.44	0.88	11.00	10.34
5.65	0.22	0.66	11.00	10.34
5.80	0.00	0.22	11.00	10.34
6.05	0.00	0.00	10.78	10.34
6.15	0.00	0.00	10.34	10.34
6.20	0.00	0.00	10.12	9.90
6.30	0.00	0.00	8.36	9.68
6.45	0.00	0.00	6.60	5.94
6.55	0.00	0.00	6.60	5.94
7.05	0.00	0.00	6.60	5.94
7.20	0.00	0.00	6.60	5.94
7.45	0.00	0.00	11.00	5.94
7.85	0.00	0.00	0.00	0.00
7.90	0.00	0.00	0.00	0.00
8.05	0.00	0.00	0.00	0.00
8.55	0.00	0.00	0.00	0.00
9.05	0.00	0.00	0.00	0.00
10.00	0.00	0.00	0.00	0.00

सारणी 2

सेरीन संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक

(ताप 35°C, आयनी प्रबलता 0.1)



धातु आयन	परिगणित मान $\log K_{ML}^{M}$	$\log \beta\ ML_2$	साहित्य में प्राप्त मान $\log K_{ML}^{M}$	$\log \beta\ ML_2$	निर्देश संख्या
Cu	7.72	13.72	4·20	7.56	14
			7.85	14.50	14
			7.97	14.62	14
			7.93	14.57	14
			7.92	14.57	14
			8.10	15.04	14
			7.57	14.01	14
			8.01	14.59	14
			8.95	16.23	14
			7.75	13.82	15
UO_2(II)	7.62	13.62	6.90	—	14
			7.60	14.75	14
Co(II)	4.30	8.00	—	—	—
Zn(II)	4.60	8.30	4.47	8.31	14
			4.65	8.68	14
			4.90	9.28	14
			4.80	9.18	15

रसायन

धातु परक्लोरेटों को उनके नाइट्रेटों के साथ सोडियम बाइकार्बोनेट के द्वारा धातु कार्बोनेटों को अवक्षेपित करके उन्हें उबलते जल से भली भाँति धोकर 1% परक्लोरिक अम्ल की परिगणित मात्रा के साथ उपचारित करके प्राप्त किया गया। इन्हें गरम करके छान लिय गया और छनितों में धातुओं की मात्रा ज्ञात की गई। अन्तिम सान्द्रता 0.005 mol dm^{-3} रखी गई। धातु आयनों की पहचान के लिये 0.1%(w/v) 1-(2-पिरिडिलैऐजो)-2 नैफ्थाल का एथेनाल में विलयन प्रयुक्त हुआ। ऐसीटोन में सिल्वर नाइट्रेट के संतृप्त विलयन को कागज पर फुहारित किया गया। उसके बाद धब्बे में ग्लुकोस की पहचान के लिये NH_3 से धूमित किया गया।

विधि

मापन की विधि अन्यत्र दी जा चुकी है[16]।

परिणाम तथा विवेचना

चित्र 1 में धातु आयन संकुलों की गतिशीलताओं को पी-एच के विरुद्ध आलेखित किया गया है। सभी दशाओं में तीन-तीन प्लेटो प्राप्त होते हैं। पहला प्लेटो असंकुलित धातु आयनों की गतिशीलता के संगत होता है और शेष दो प्लेटो दो भिन्न संकुलों के निर्माण के सूचक होते हैं। यहाँ पर सेरिनेट ऋणायन को लिगैंडकारी स्पीसीज़ माना गया है। चित्र से स्पष्ट हो जाता है चार द्विसंयोजी धातु आयनों के साथ पहला संकुल धनायनिक होता है इसलिये यह माना गया है कि एक सेरीनेट ऋणायन एक द्विसंयोजक धातु धनायन से संकुलित होकर 1:1 संकुल बनाता है। चूँकि सभी धातु आयनों के साथ परवर्ती संकुल की गतिशीलता शून्य है (अन्तिम प्लेटों से सूचित) अतएव संकुल अनावेशित हैं और उनका संघटन धातु धनायन तथा सेरिनेट ऋणायन के प्रति 1:2 होना चाहिये।

सेरीन का लिगैंडकारी स्पीसीज़ को (L) मानने पर पर समीकरण (5) निम्नवत् सरलीकृत हो जाता है—

$$U=\frac{U_0+U_1K_1[L]+U_2K_1K_2[L]^2}{1+K_1[L]+K_1K_2[L]^2}$$

जहाँ K_1, K_2 स्थायित्व स्थिरांक हैं जो क्रमशः 1 : 1 तथा 1 : 2 धातु-संकुलों के लिये हैं। NaOH से उदासीनीकरण करने पर विभिन्न पी-एच मानों पर लिगैंडकारी स्पीसीज़ की सान्द्रता (L) निम्नलिखित समीकरण से परिगणित की गई है—

$$[L]=\frac{L_T}{1+k_2[H]+k_1k_2[H]^2}$$

जहाँ L_T सेरीन की कुल सान्द्रता है जो विप्रोटोनीकरण की विभिन्न अवस्थाओं के लिये है। k_1 तथा k_2 सेरीन के वियोजन स्थिरांक हैं ($k_1=10^{2.18}$, $k_2=10^{8.84}$)[14]। ये मान सारणी 2 में अंकित हैं।

निर्देश

1. जोक्ल, वी०, J. Chromatography, 1964, **14**, 71·

2. बियर्नाट, जे०, J., Rocz. Chem. 1964, **38**, 343·

3. यादव, पी० सी०, घोष, ए० के०, यादव, के० एल० तथा डे, ए० के०, J. Chromatographia, 1976, **119**, 563,

4. सिंह, आर० के० पी०, सरकार, जे० के०, यादव, जे० आर० तथा यादव, के० एल०, Eectrochem Act, 1981, **26**, 394.

5. सिंह, आर० के० पी०, यादव, जे० आर०, यादव, पी० सी० तथा यादव, के० एल०, Z. Phys. Chem., 1982, **3**, 264.

6. सिंह, आर० के० पी०, यादव, पी० सी० तथा यादव, के० एल०, Proc. Nat. Aca. Sci., 1981, **15**(A), IV·

7. सिंह, एस०, यादव, एच० एल०, यादव, पी० सी० तथा यादव, के० एल०, Rev. De. Chem· Minerale (France) (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

8. ली, एन० सी०, ब्रोदर तथा डूडी, ई० डी०, J. Amer. Chem. Soc. 1951, **79**, 5859·

9. मारावेट्ज, एच० तथा स्टैमैक, ई०, J. Phys. Chem., 1957, **61**, 1357.

10. स्टैक, डब्लू० ई० तथा स्किनर, एच० ए०, Trans. Faraday Soc., 1967, **63**, 1136.

11. राजू, ई० वी० तथा माथुर, एच० वी०, J. Inorg. Nucl., 1968, **30**, 2181.

12. लेटर जे० ई० तथा बाउमैन, जे० ई०, J. Amer. Chem. Soc., 1952. **92**, 437·

13. रामानुजम, यू० वी० तथा सेल्वजन, यू० एम०, Inorg. Chem. Acta, 1981, **55**, 152.

14. पेरिन, डी० डी०, Stability Constants of Metal Complexes, भाग B (organicligand), पर्गमैन प्रेस आक्सफोर्ड I.U.P. A.C. Chemical Data Series No. **22**, 1979·

15. रामानुजम, यू० पी० तथा रंगरा, के०, Ind. J. Chem., 1980, **19**(A). 240,

16. सिंह, एस०, यादव, एच० एल० तथा यादव, के० एल०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1984. **27**(2), 208-217.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 29, No. 4, 1986

वेनीलीन एवं आर्थो फेनिलीन डाइऐमीन के शिफ क्षारक के आयनन स्थिरांक तथा ZrO^{++} के साथ बने संकुल के स्थायित्व स्थिरांक का अध्ययन

पुरुषोत्तम बी० चक्रवर्ती

तथा

अशोक कुमार मैनी

स्नातकोत्तर एवं शोध प्रयोगशाला, रसायन विभाग

शासकीय मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल (म० प्र०)

[प्राप्त—मार्च 17, 1986]

सारांश

वेनीलीन तथा आर्थो फेनिलीन डाइऐमीन के संघनन से बना शिफ क्षारक एक बहुदन्तीय लीगैंड की तरह व्यवहार करता है। इसके प्रोटान लीगैंड स्थायित्व स्थिरांक एवं ZrO^{++} के साथ बने संकुल का सम्भवन स्थिरांक 35° एवं 45° से० तथा 0.1M आयनिक सान्द्रता पर इर्विंग-रोसॉटी विधि द्वारा परिकलित किये गये हैं। साथ ही शिफ क्षारक के अम्लीय माध्यम में आयनन तथा ZrO^{++} आयन से संकुलन की अभिक्रिया की विवेचना भी की गयी है।

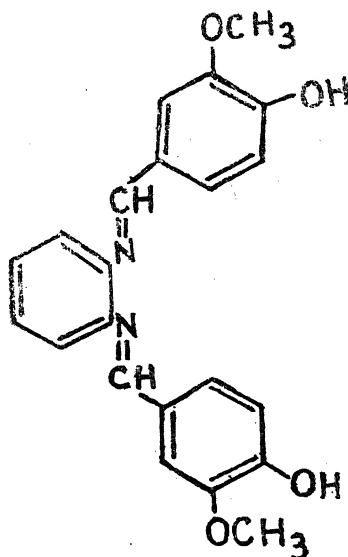
Abstract

Ionisation constant of Schiff base of vanillin and *o*-phenyline diamine and stability constant of complex with ZrO^{++}. *By* P. B. Chakravarti and Ashok Kumar Maini, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Ionisation constant of Schiff base of vanillin and o-phenyline diamine and stability complex with ZrO^{++} have been found.

यद्यपि सेलिसिलैल्डिहाइड और विभिन्न डाइऐमीनों के संघनन से अनेक बहुदन्तीय शिफ क्षारकों का निर्माण तथा उनके धातु संकुलों का अध्ययन किया जा चुका है[1–12], किन्तु वेनीलीन तथा डाइऐमीनों से बने शिफ क्षारकों का अध्ययन साहित्य में उपलब्ध नहीं है। हाल ही में वेनीलीन और फेनीलीन डाइऐमीन

के शिफ क्षारक के साथ ताम्र संकुल का वर्णक्रमलेखीय अध्ययन प्रकाशित हुआ है[13] । किन्तु इस शिफ क्षारक के आयनन स्थिरांक एवं धातु आयनों के साथ बने संकुलों के सम्भवन स्थिरांकों के विषय में कोई जानकारी साहित्य में उपलब्ध नहीं है । अतः वेनीलीन तथा डाइऐमीनों के संघनन से बने बहु-दन्तीय लीगैंडों के अध्ययन के क्रम में[14] इस शोधपत्र में आर्थोफेनिलीन डाइऐमीन तथा वेनीलीन से बने शिफ क्षारक NN′ बिस 4-(1-हाइड्राक्सी 2 मेथाक्सी फेनिल) 1,2 फेनिलीन डाइऐमीन (I), के 35° तथा 45° से० तथा 0.1M(KNO_3) आयनिक सान्द्रता पर प्रोटान लीगैंड सम्भवन स्थिरांक तथा ZrO^{++} के साथ बने इसके संकुल के स्थायित्व स्थिरांक का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है ।



(I) : फेन-वेन शिफ-क्षारक

प्रयोगात्मक

प्रयोग में लाये गये सभी रसायन उच्च शुद्धता वाले ए० आर० या एस० एम० कोटि के थे ।

शिफ क्षारक वेनीलीन और आर्थोफेनिलीन डाइऐमीन के ऐल्कोहाली विलयन, 2 : 1 आणविक अनुपात में मिलाकर, पश्चवाहित करके उसी प्रकार बनाया गया, जिस प्रकार बेन्जीडीन का शिफ क्षारक बनाया गया ।[14] उपयोग में लाये गये उपकरण तथा प्रायोगिक विधियाँ हमारे पूर्व शोधपत्र के अनुरूप ही थीं ।[14]

शिफ क्षारक तथा ZrO^{++} आयन के मध्य बनने वाले संकुल का भारशः अनुपात नायर तथा पान्डे[15] की एक परिवर्तित विधि का उपयोग करते हुये चालकतामापी अनुमापन द्वारा प्राप्त किया गया । शिफ-क्षारक के प्रोटान लीगैंड सम्भवन स्थिरांकों का परिकलन तथा ZrO^{++} तथा शिफ

क्षारक के मध्य क्रिया का अध्ययन, 0.1M आयनिक सान्द्रता और 35° तथा 45° से० पर, केलविन-जेरम की[16] इरविंग रोसॉटी द्वारा परिवर्तित पी-एच अनुमापन विधि[17] द्वारा किया गया। इस हेतु निम्नलिखित विलयन, कार्बन डाइ आक्साइड मुक्त 0.1M सान्द्रता के 1 : 1 ऐथनॉल जल (आयतनशः) मिश्रण में बने, KOH विलयन द्वारा अनुमापित किये गये :

(अ) 5 मिली० 0.1M HNO_3

(ब) मिश्रण (अ) +10 मिली० 0.01M शिफ क्षारक विलयन

(स) मिश्रण (ब) +5 मिली० 0.002M $ZrOCl_2$ विलयन

उपर्युक्त सभी प्रकरणों में कुल आयतन 1 : 1 (आयतनशः) ऐथनॉल जल मिश्रण में 50 मिली० रखते हुये, आयनिक सान्द्रता 0.1M रखने के लिये आवश्यक मात्रा में 1.0M सान्द्रता का KNO_3 विलयन मिलाया गया। 1 : 1 ऐथेनॉल जल माध्यम में पी-एच मानों में आवश्यक सुधार वान यीटर्ट और हास की विधि से किया गया।[18]

प्रत्येक प्रकरण में, मिलाये गये क्षार पर प्राप्त पी-एच मानों को आलेखित करने पर अनुमापन वक्रों के बीच के क्षैतिज अन्तरों के मानों से $\bar{n}A$, $\bar{n}$ तथा PL− के मान इरविंग-रोसॉटी द्वारा दिये गये समीकरणों[17] की सहायता से परिकलित किये गये। प्रोटान लीगैंड स्थायित्व स्थिरांक के मान विभिन्न परिकलन विधियों द्वारा निकाले गये तथा समरूप पाये गये। उपयोग में लायी गयी परिकलन विधियाँ निम्नलिखित थीं :

(1) अर्ध समाकलन विधि,

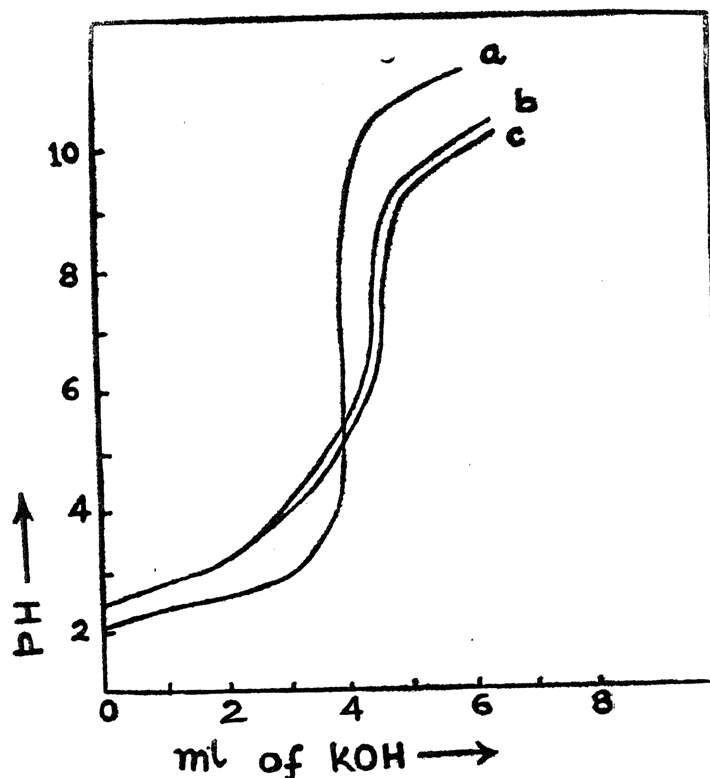
(2) पाइन्ट वाइस परिकलन विधि, तथा

(3) रेखीय आरेख विधि।

ZrO^{++} संकुल का स्थायित्व स्थिरांक अर्ध $\bar{n}$ निर्धारण विधि सम्भवन वक्र से सीधे प्राप्त किया गया तथा इसे निम्नतम वर्ग विधि द्वारा संशोधित किया गया। ये मान सारणी 1 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

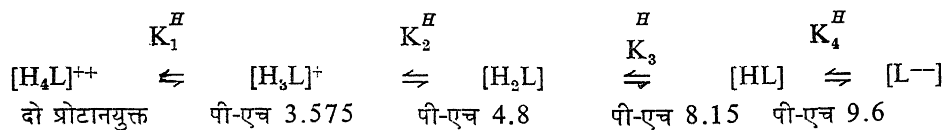
अम्ल, लीगैंड तथा धातु अनुमापनों के वक्र चित्र 1 में दिये गये हैं जिसे देखने पर ज्ञात होता है कि लीगैंड का वक्र अम्ल के वक्र से पी-एच 6.5 तक पीछे रहता है। यह स्थिति लीगैंड अणु से प्रोटान संयुक्त होने की घटना निरुपित करती है। वक्रों के अध्ययन से स्पष्ट होता है कि लीगैंड के प्रति मोल से दो तुल्यांकी प्रोटान संयुक्त होते हैं। ये प्रोटान लीगैंड अणु में उपस्थित दो नाइट्रोजन परमाणुओं से संयुक्त रहते हैं तथा 6.5 पी-एच तक एक-एक करके आयनित हो जाते हैं। पी-एच 6.5 के बाद लीगैंड वक्र अम्ल के वक्र से आगे होने लगता है और अन्ततः दो तुल्यांकी प्रोटानों के मुक्त होने को व्यक्त करता है। ये दो प्रोटान लीगैंड के वेनीलीन अंशों में उपस्थित फिनोली समूहों (I) से मुक्त होते हैं। इस तरह



चित्र 1 : अनुमापन-वक्र, 35°C

a—अम्ल वक्र, b—लीगैंड वक्र c—धातु वक्र

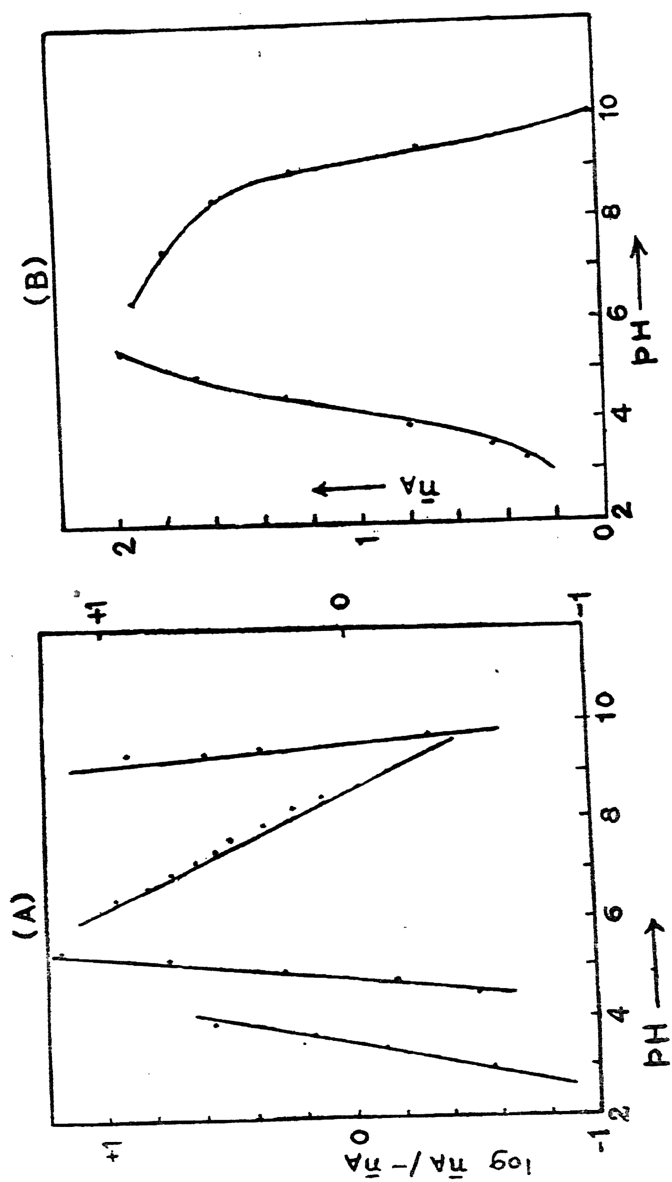
अम्लीय माध्यम में लीगैंड दो प्रोटान युक्त आयनिक स्पीसीज, (H_4L^{++}) के रूप में रहता है। यह स्पीसीज क्रमशः चार पगों में अम्लीय वियोजन प्रदर्शित करती है। इनमें से प्रथम दो पग, दो नाइट्रोजनों से जुड़ने वाले प्रोटानों के पृथक्करण को प्रदर्शित करते हैं तथा बाद के दो पग लीगैंड के फिनाली समूहों के क्रमशः आयनन को व्यक्त करते हैं। यथा 35° से० पर आयनन साम्य निम्नलिखित रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं :



$$[H_4L]^{++} \overset{K_1^H}{\rightleftharpoons} [H_3L]^{+} \overset{K_2^H}{\rightleftharpoons} [H_2L] \overset{K_3^H}{\rightleftharpoons} [HL] \overset{K_4^H}{\rightleftharpoons} [L^{--}]$$

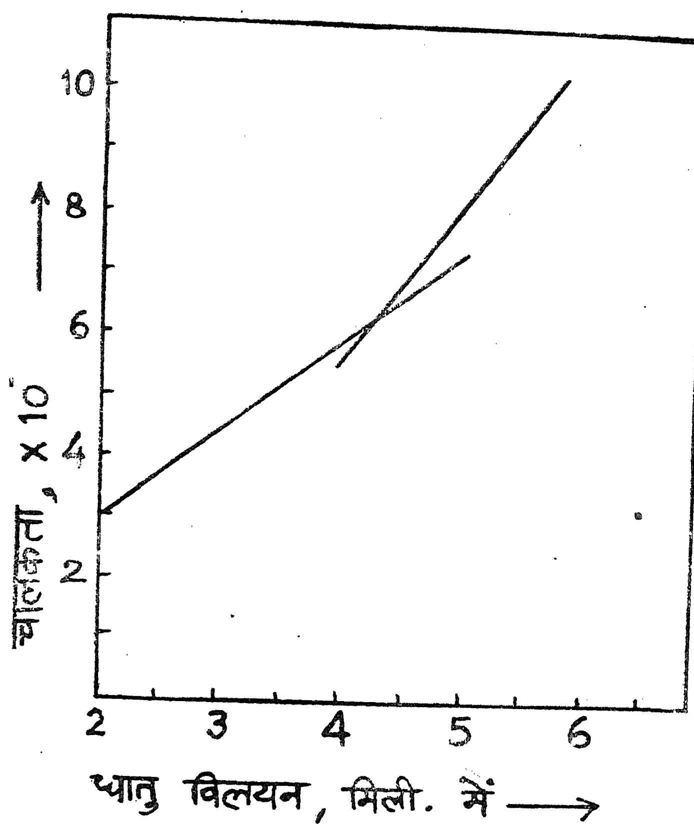
दो प्रोटानयुक्त पी-एच 3.575 पी-एच 4.8 पी-एच 8.15 पी-एच 9.6

प्रोटान लीगैंड सम्भवन स्थिरांकों के मान सारणी 1 में दिये गये हैं जिन्हें देखने पर ज्ञात होता है कि ताप बढ़ाने पर लीगैंड के आयनन पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ता है। यद्यपि नाइट्रोजनों पर संयुक्त



चित्र 2 : फेन-वेन के प्रोटान-लीगैंड सम्भवन स्थिरांक,
(A) रेखीय आरेख, (B) अर्ध n̄A-विधि

प्रोटानों का आयनन (ताप बढ़ाने पर) थोड़ा पहले होने लगता है, किन्तु फिनोली हाइड्रोजनों का आयनन अपेक्षाकृत थोड़े उच्च पी-एच मानों पर होता है।



चित्र 3 : चालकतामापी अनुमापन

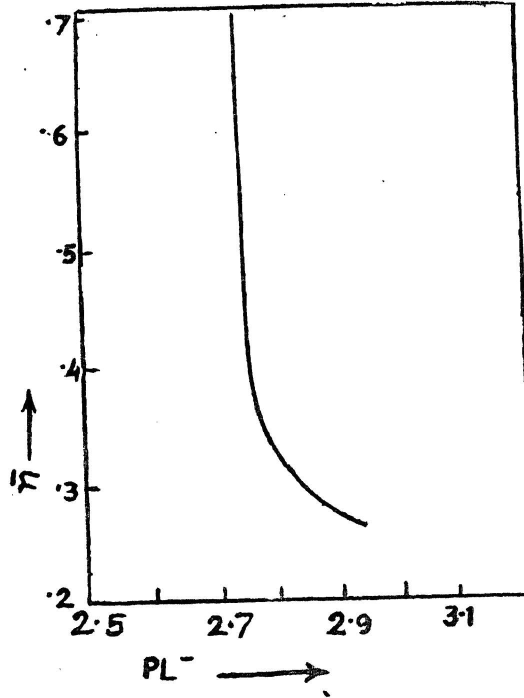
चालकतामापी अनुमापनों (चित्र 3) से केवल एक ML (1 ; 1), संकुल का निर्माण स्पष्ट होता है। केवल एक संकुल बनने की पुष्टि के $\bar{n}$ अधिकतम मान से भी होती है (चित्र 4)[17]। पी-एच अनुमापन वक्रों के अध्ययन से स्पष्ट होता है कि धातु वक्र पी-एच 3 के समीप से ही लीगैंड वक्र से पृथक् होने लगता है जो बताता है कि धातु आयन के लीगैंड के प्रारम्भिक आयनन को प्रभावित करता है। अतः ZrO^{++} आयन लीगैंड के नाइट्रोजनों से संयुक्त दोनों प्रोटानों को मुक्त करते हुये जुड़ता है।

सारणी 1

वेनीलीन और फेनिलीन डाइऐमीन शिफ क्षारक के प्रोटान लीगैंड सम्भवन स्थिरांक तथा ZrO^{++} के साथ बने इसके संकुल का 35° तथा 45° से० तथा 0.1M (KNO_3) आयनिक सान्द्रता पर स्थिरांक

	35°	45°	विधि
$\log K_1^H$	3.575	3.450	ए
	3.575	3.450	बी
	3.570	3.550	सी
$\log K_2^H$	4.800	4.675	ए
	4.800	4.675	बी
	4.780	4.658	सी
$\log K_3^H$	8.650	8.752	ए
	8.650	8.750	बी
	8.810	8.380	सी
$\log K_4^H$	9.625	9.950	ए
	9.625	9.950	बी
	9.600	9.870	सी
$\log K_1$	2.760	2.760	ए
(ZrO^{++}संकुल)	2.786	2.788	डी

संकेत—ए-ग्राफीय विधि। बी-रेखीय आरेख विधि। सी-पाइन्ट वाइस विधि। डी-निम्नतम वर्ग विधि।



चित्र 4 : ZrO^{++}फेन-वेन संकुल का सम्भवन--वक्र, 35°, 0.1 (KNO_3) पर

निर्देश

1. रिजवी, एस० एफ० एच० तथा अहमद, नसीर, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1976, **LIII**, 854.
2. बिरदार, एन० एस०, लोकर, ए० एल० तथा कुलकर्णी वी० एस०, **करेंट साइंस**, 1975 **44(6)** 180.
3. डे, के० तथा डे, आर० एल०, **जर्न० इनोर्ग० न्यू० केमि०**, 1975, **37(3)**, 843.
4. विरदार, एन० एस० तथा सहयोगी, **जर्न० कर्नाटक यूनी०**, 1972, **17**, 1.
5. सास्जार तथा सहयोगी, **ऐक्टा केमि० ऐकेडे० साइंस** (हंग्री), 1975, **87(4)**, 331,; 1975, **86(2)**, 89.
6. कावाकामी तथा सहयोगी, **जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1971, **33**, 3773.
7. मैक क्वाटी तथा सहयोगी, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1975, **97**, 5117.
8. यूरीको ऐवे तथा सहयोगी, **बुले० केमि० सोसा० जापान**, 1974, **47**, 2655.

9. मुरे, के० एस० तथा शीहान, आर० एम०, **केम० फिजि० लैटर्स**, 1973, **22**(**2**) 406.

10. यामादा तथा सहयोगी, **इनार्ग० केमि० ऐक्टा**, 1968, **2**(**4**), 425; 1975, **12**(**1**) 9.

11. पोद्दार, एस० एन० तथा दास, एन० एस०, **इन्डियन जर्न० केमि०**, 1974, **12**(**10**), 1105.

12. बोचर, एल० जे० तथा फरैल, एम० ओ०, **जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०**, 1973, **35**, 3731.

13. अरोरा, ओ० पी० तथा सहयोगी, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1980, **LVII**, 273.

14. चक्रवर्ती, पी० वी० तथा मैनी, ए० के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, (प्रेषित)

15. नायर, एम० तथा पान्डे, सी० एम०, **प्रोसी० इन्डियन ऐके० साइंस**, 1942, **27ए**

16. केल्विन, एच० तथा विल्सन, के० डब्लू०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1954, **67**, 2003.

17. इरविंग, एच० एम०, रोसॉटी, एच० एस०, **जर्न० केमि० सॉसा०**, 1954, 2904.

18. वान यीटर्ट, एल० जी० तथा हास, सी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1953, **75**, 3651.